Analisi Matematica 1
Diciannovesima lezione

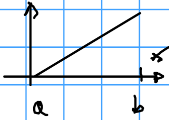
prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

10 dicembre 2009

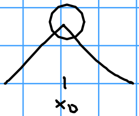
Teorema (di Fermat) Se $x_0 \in]a,b[$ è pto di max / min relativo per f, se f è derivabile in x_0, allora x_0 è **stazionario** per f, cioè $f'(x_0)=0$

COMMENTI – ci vuole x_0 "INTERNO" all'intervallo – se x_0 fosse un estremo la tesi non sarebbe necessariamente vera:



pto di max – ma non stazionario

– ci vuole che f sia derivabile

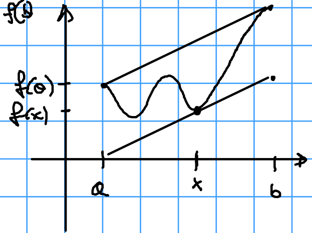


– Quindi i max / min relativi per $f: [a,b] \to$ VANNO CERCATI tra
(a) i pti stazionari
(b) gli estremi
(c) i pti in cui f non è derivabile

Teorema di Lagrange

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$.

Allora esiste un punto $x \in]a,b[$ tale che



$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

GEOMETRICAMENTE: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta passante per $(a,f(a)),(b,f(b))$

Dunque il teorema afferma che c'è un x in $]a,b[$ tale che la tangente per $(x,f(x))$ è parallela a tale retta.

Dim. Introduco la funzione (retta secante)

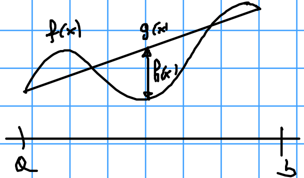
$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

(NOTA CHE g è una retta di coeff ang. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, che

$$g(a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$$

$$g(b) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a}) = \cancel{f(a)} + f(b) - \cancel{f(a)} = f(b)$$

quindi è proprio la retta per $(a, f(a))$, $(b, f(b))$).



Infine poniamo:

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Cerchiamo il punto x come pto di max/min per h.

Essendo f continua $\Longrightarrow$ h è continua $\Longrightarrow$ (per Weierstrass) esistono il max e il min di h, cioè esistono $x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $h(x_1) \leq h(x) \leq h(x_2)$

Ci sono due possibilità:

(1) uno dei due (o entrambi) punti è "INTERNO" cioè si trova in $]a,b[$. In tale punto, lo chiamo $\bar{x}$, h' fa zero (per Fermat) $h'(\bar{x}) = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad f'(\bar{x}) - g'(\bar{x}) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$f'(\bar{x}) = g'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

DUNQUE $\bar{x}$ verifica la tesi

(2) Entrambi x_1 e x_2 sono agli estremi .. Però in questo caso

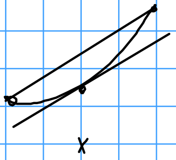
$h(x_1) =$ $h(a)/h(b) = 0$ perché
$h(x_2) =$

$h(a) = f(a) - g(a) = 0$
$h(b) = f(b) - g(b) = 0$
(f e g coincidono in a e in b)

Dunque in questo caso $h(x_1) = h(x_2) = 0 \implies$

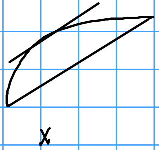
$h(x)$ è identicamente nulla ($f(x) = g(x)$)

$\implies h'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$ (ogni x va bene)



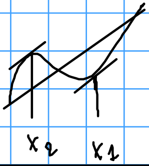
$x =$ pto di min per h

(il pto di max è agli estremi)



$x =$ pto di max per h

(il pto di min è agli estremi!)

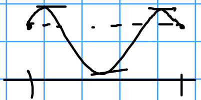


x_1, x_2 entrambi interni $\Longrightarrow$ due pti "di Lagrange"

VARIANTI DI LAGRANGE

__Rolle__ : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$. Ipotesi : $f(b) = f(a)$

__Tesi__ $\exists\ x \in]a,b[$ in cui $f'(x) = 0$



__DIM.__ Segue subito da Lagrange.

Cauchy Ci sono due funzioni $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$.

Supponiamo che $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Tesi: $g(b) \neq g(a)$ Esiste un punto $x \in]a,b[$ tale che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(Lagrange è una conseguenza di Cauchy con $g(x) = x$)

Dim. Cerco di ricondurmi a Lagrange (anzi a Rolle).

Introduco una funzione $h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Cerco di scegliere λ e μ in modo che

$h(b) = h(a)$. Questo vuol dire

$$\lambda f(a) + \mu g(a) = \lambda f(b) + \mu g(b) \iff$$

$$\lambda (f(a) - f(b)) = \mu (g(b) - g(a))$$

Si vede che posso prendere

$$\lambda = g(b) - g(a) \quad , \mu = f(a) - f(b)$$

Applicando Rolle trovo $x \in]a,b[$ per cui $h'(x) = 0$

cioè $$(g(b) - g(a)) f'(x) + (f(a) - f(b)) g'(x) = 0 \iff$$

$$(g(b) - g(a)) f'(x) = (f(b) - f(a)) g'(x)$$

dato che $g'(x) \neq 0$ posso dividere per $g'(x)$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot \left(g(b) - g(a) \right) = f(b) - f(a)$$

Posso affermare che $g(b) \neq g(a)$ altrimenti (per Rolle) esisterebbe $x' \in]a,b[$ con $g'(x') = 0$ (contro l'ipotesi) $\Rightarrow$ posso dividere per $g(b) - g(a)$ $\Rightarrow$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad \#$$

DERIVATA E MONOTONIA

<u>Teorema</u> Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, cont. su $[a,b]$, der. su $]a,b[$.

f CRESCENTE (in senso debole) $\Longleftrightarrow$ (se e solo se) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Dim

NOTA dire che f è crescente equivale a dire che

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0 \qquad \forall\, x, y \in [a,b] \,,\; x \neq y$$

(basta applicare la def di crescenza).

$\Rightarrow$ (conseguenza della def di derivata) Se f è crescente

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0 \qquad \forall x \quad \forall y$$

Fisso x_0, prendo $x \neq 0$, so che $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

(monotonia del limite)

$\Leftarrow$ (non è ovvio - non posso invertire il ragionamento precedente: da $f'(x_0) \geq 0 \not\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$)

USO LAGRANGE. Dati due punti qualunque $x \neq y$.

Considero $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Applicando Lagrange

su $[x,y]$ - o su $[y,x]$

trovo un punto t compreso tra x e y per cui

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(t) \geq 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{perché so che } f' \geq 0 \\ \text{in ogni punto}\end{array}\right)$$

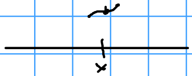
$\Rightarrow$ f crescente #

OSS. Se sapessimo $f'(x) > 0 \quad \forall x$ potremmo dire (usando la permanenza del segno):

dato x esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x' \in \,]x-\delta,\, x+\delta[\qquad \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} > 0$$

la funzione cresce "localmente" in x



DA QUI SI POTREBBE (MA È CONCETTUALMENTE COMPLICATO) DIMOSTRARE LA CRESENZA SU TUTTO $[a,b]$

Teorema (di Fermat)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo e sia x_0 un punto di I ***diverso dagli estremi*** *di I. Se x_0 è un punto di massimo oppure minimo relativo per f e se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.*

DIM

Osservazione

Tutte le ipotesi del teorema di Fermat sono necessarie ESEMPI.
Dunque i punti di massimo e minimo relativo (tra cui quelli assoluti) vanno cercati:

- Tra i punti dell'intervallo aperto in cui f è derivabile e f' fa zero.
- Tra i punti in cui f non è derivabile.
- Tra gli estremi dell'intervallo.

Definizione

Un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$ si dice **punto stazionario per f**.

Il teorema di Fermat afferma dunque che i punti di massimo/minimo relativo INTERNI all'intervallo (cioè non estremi) sono punti stazionari per f

Osservazione

Non è vero in generale che i punti stazionari sono sempre punti di massimo o minimo relativo, come mostra la funzione $f(x) = x^3$ x^3. Il punto 0 è di *flesso* per la funzione x^3 (c'é un cambio tra concavità e convessità ...)

Teorema (di Lagrange)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, con $a < b$ numeri reali. Se f è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, allora esiste un punto (intermedio) $c \in]a,b[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DIM

Osservazione

Dal punto di vista grafico il teorema di Lagrange afferma che c'è un punto c interno all'intervallo tale che la retta tangente al grafico di f per $(c, f(c))$ è parallela alla retta che congunge i due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

DISEGNO

Teorema (monotonia e segno della derivata)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$ in $\mathbb{R}$) e supponiamo che f sia continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora

$$f \text{ è crescente } \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$$

Analogamente

$$f \text{ è decrescente } \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a,b[$$

DIM

Osservazione

Crescenza e decrescenza vanno intese in senso debole: dire che f è crescente significa

$$\forall x, y \quad x \leq y \to f(x) \leq f(y)$$

(e il viceversa per la decrescenza).
Quindi una funzione costante è sia crescente che decrescente.

Conseguenza

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$ in $\mathbb{R}$) e supponiamo che f sia continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora

$$f \text{ è costante } \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

ATTENZIONE

L'affermazione sopra può essere falsa se f non è definita su un intervallo. Si provi per esempio a fare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

DISEGNO

Nel caso della monotonia stretta vale solo un'implicazione.

Teorema

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *(*$a < b$ *in* $\mathbb{R}$*) e supponiamo che* f *sia continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* $]a,b[$*. Allora*

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a,b[\Rightarrow f \text{ è strettamente crescente}$$

mentre

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a,b[\Rightarrow f \text{ è strettamente decrescente}$$

Osservazione

In effetti la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente ma non ha derivata strettamente positiva, essendo che $f'(0) = 0$ DISEGNO.
Dunque nel teorema precedente non valgono le frecce "$\Leftarrow$".

Varianti del teorema di Lagrange [1]

Teorema (di Rolle)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *con* $a < b$ *numeri reali. Se* f *è continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* $]a,b[$ *e se* $f(a) = f(b)$, *allora esiste un punto (intermedio)* $c \in]a,b[$ *tale che*

$$f'(c) = 0$$

È un caso particolare del teorema di Lagrange.

Teorema (di Cauchy)

Siano $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, *con* $a < b$ *numeri reali. Supponiamo* f,g *continue in* $[a,b]$ *e derivabili in* $]a,b[$ *e supponiamo che* $g'(x) \neq 0$ *per ogni* x *in* $]a,b[$. *Allora* $g(b) \neq g(a)$ *ed esiste un punto (intermedio)* $c \in]a,b[$ *tale che*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Questo teorema generalizza il teorema di Lagrange DIM

[1] nel libro non ci sono (almeno non esplicitamente)

STUDI DI FUNZIONE

$f(x) = x^x$ come è fatta ?

- dove è definita? (per quali x ha senso l'espressione x^x)
(DOMINIO)

La risposta più "semplice" è $\{x > 0\}$

(la funzione $(x, y) \to x^y$ è definita per
$x > 0$, $y \in \mathbb{R}$)

$$\boxed{\text{DOMINIO} = \,]0, +\infty[}$$

- Continuità dentro il dominio e limiti agli "estremi"
(cioè nei pti di accumulazione del dominio, che non sono nel dominio)

Nel caso in esame $f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è continua su $]0,+\infty[$ per i teoremi visto (prodotto e composizione di funzioni continue:

$x \mapsto x$ continua
$x \mapsto \ln(x)$ continua $\Rightarrow$ $x \mapsto x\ln(x)$ continua

$\Rightarrow$ $x \mapsto e^{x\ln(x)}$ continua)

Gli "estremi" sono 0 e $+\infty$.

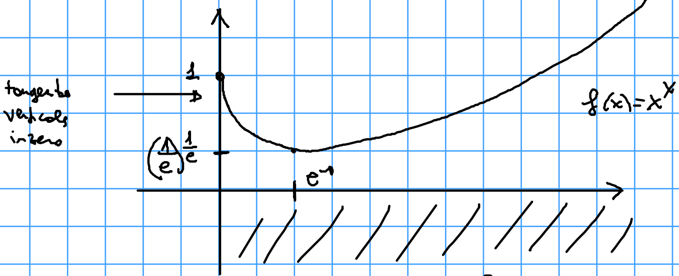
$$\lim_{x \to +\infty} e^{x\ln(x)} \text{ "}=\text{" } e^{+\infty \cdot +\infty} = e^{+\infty} = +\infty \text{"}$$

(NESSUNA FORMA INDETERMINATA QUI)

$$\lim_{x \to 0^+} e^{x\ln(x)} = 1^- \quad \longleftrightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0^-$$

(0^- perché $\ln(x) \to -\infty$ e quindi $\ln(x) < 0$ se $x \to 0$)

(FORMA IND. TIPO $0 \cdot \infty$ — MA SAPPIAMO CHE TENDE A ZERO. VEDI TABELLA LIMITI NOTEVOLI)



- SEGNO e punti in cui $f(x)=0$ — DA FARE SOLO SE NON È COMPLICATO — IL SEGNO POTREBBE ANCHE VENIRE ALLA FINE DOPO LO STUDIO DI f'

— In questo caso $f(x) > 0 \quad \forall x$

- Asintoti obliqui (LO VEDIAMO IN UN ALTRO ESEMPIO)
Qui non ci sono.

— Studio della derivabilità e del segno di f' ($\Rightarrow$ monotonia, max min).

Calcoliamo la derivata di $f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$

$$f'(x) = e^{x\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(x \cdot \ln(x)\right) =$$

$$x^x\left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \underbrace{x^x}_{\text{sempre } >0}\left(\ln(x) + 1\right)$$

Qual è il segno di $f'(x)$? Dipende da $\ln(x)+1$

$$\ln(x) + 1 = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1}$$

Dato che $\ln$ è crescente: $f'(x)<0 \iff \ln(x)+1<0 \iff x<e^{-1}$

$f'(x)>0 \iff \ln(x)+1>0 \iff x>e^{-1}$

Dunque $\bar{x} = e^{-1}$ è (l'unico) pt di minimo (assoluto)

Il (valore) minimo di f è $f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = \frac{1}{e^{1/e}}$

- Derivabilità agli estremi:

dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ posso estendere $f(x)$

ponendo $f(0) = 1$ ($\Rightarrow$ f risulta continua in $x=0$)

Mi posso chiedere se f è derivabile in zero.

Per questo devo calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1} + x\ln x + o(x\ln(x)) - \cancel{1}}{x} = \left(\begin{matrix}\text{principio di}\\ \text{sost. degli inf.}\end{matrix}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

NON È DERIVABILE

Altro esempio

- $f(x) = x e^{-x^2}$

DOMINIO $\qquad \mathbb{R}$

CONTINUITÀ E LIMITI $\qquad$ Continua/derivabile $\forall x$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^- \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

$x e^{-x^2}$ è indeterminato tipo $\infty \cdot 0$ MA
NOI SAPPIAMO CHE $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$y^\alpha e^{-y} \longrightarrow 0 \quad \text{se } y \to +\infty \quad \Longrightarrow$$

$$(x^2)^\alpha e^{-x^2} \longrightarrow 0 \quad \text{se } x \to \pm\infty$$

se prendo $\alpha = \frac{1}{2}$ trovo i due limiti

NOTA f è DISPARI, cioè $f(-x) = -f(x)$

(simmetrico rispetto all'origine); basterebbe studiarla

per le $x > 0$ — $f(0) = 0$.

Segno $f(x) > 0 \iff x > 0$ / $f(x) < 0 \iff x < 0$

Asintoti obliqui — in realtà sono orizzontali.

Derivabilità e .. $f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x)$

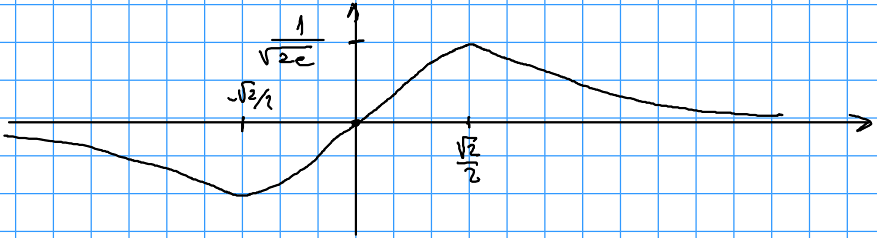
$$= e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$f'(x) > 0 \iff 1 - 2x^2 > 0 \iff 2x^2 - 1 < 0$$

$$\iff x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

DUNQUE



$\frac{\sqrt{2}}{2}$ pto di max ; $\max_{\mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$

Altro esempio Dati $p, q \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 + px + q$

Dominio $= \mathbb{R}$

Limiti $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} = -\infty$

(si mette in evidenza x^3 ...)

Segno ?? non lo so, a meno che io non sappia risolvere l'eq. di III° grado.

Vediamo se alla fine si recupera qualche informazione.

Derivata $$f'(x) = 3x^2 - p$$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = p$$

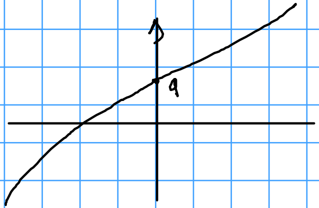
$p > 0$ $\quad x = x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}$ $\quad f'(x) < 0$ per $x \in \left]-\sqrt{\frac{p}{3}}, \sqrt{\frac{p}{3}}\right[$

$p = 0$ $\quad x = 0$ $\quad f'(x) \geq 0$, $f'(x) = 0 \iff x = 0$

$p < 0$ $\quad$ Nessuna radice $\quad f'(x) > 0$

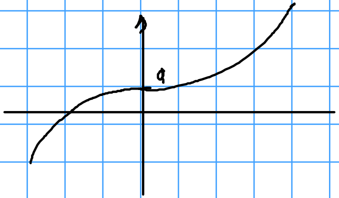
Dunque

$p < 0$



$x^3 + px + q = 0$ ho UNA SOLA RADICE

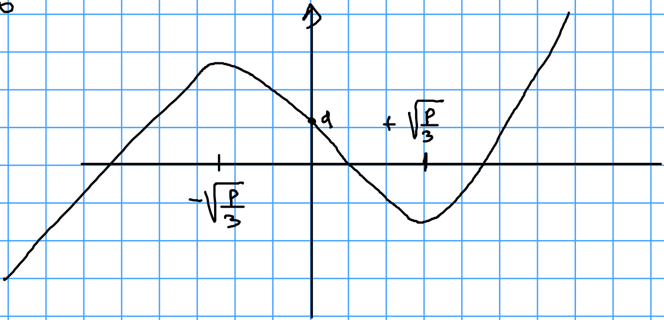
$p = 0$



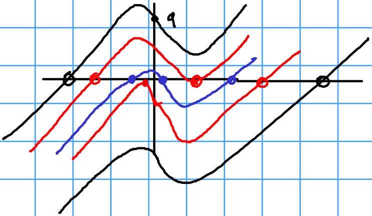
ANCHE QUI UNA SOLA RADICE – PERÒ SE ANCHE $q=0$ $x=0$ DIVENTA DI MOLTEPLICITÀ 3

("Tre radici coincidenti in zero")

$p > 0$



a seconda di q posso avere:



1 RADICE

2 RADICI - UNA DI MOLTEPLICITÀ 2

3 RADICI