Analisi Matematica 1
Diciottesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

4 dicembre 2009

Derivata della funzione composta f derivabile in x_0, chiamo $y_0 = f(x_0)$, g derivabile in y_0

Posso considerare la funzione composta $g \circ f$, data da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale la formula

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

Per capire la formula pensiamo a due rette

$$f(x) = m x + q \qquad g(y) = m_1 y + q_1$$

$$g(f(x)) = m_1 (m x + q) + q_1 = \underbrace{m_1 m}\, x + m_1 q + q_1$$

Dim. Facciamolo con gli o-piccoli.

(1) Dire che $f'(x_0) = m$ vuol dire che

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)$$

(2) Dire che $g'(y_0) = m_1$ vuol dire che

$$g(y) = g(y_0) + m_1(y - y_0) + o(y - y_0)$$

(3) Da (1) e (2) segue

$$g(f(x)) = g(\underbrace{f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)}_{y}) =$$

$$g(y_0) + m_1(\cancel{f(x_0)} + m(x - x_0) + o(x - x_0) \cancel{- y_0})$$

$= y_0$

$$+ o(\cancel{f(x_0)} + m(x - x_0) + o(x - x_0) \cancel{- y_0}) =$$

$$g(y_0) + m_1(m(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(m(x - x_0) + o(x - x_0))$$

$$= g(y_0) + m_1 m (x-x_0) + \underbrace{m_1 o(x-x_0) + o\big(O(x-x_0)\big)}_{o(x-x_0)}$$

$$= \underbrace{g(y_0) + m_1 m (x-x_0)}_{\circledast} + o(x-x_0)$$

Questo equivale a dire che $\circledast$ è la retta tangente al grafico di g nel punto $(y_0, g(y_0))$ e che allora

$$m_1 m = (g \circ f)'(x_0) \qquad \#$$

<u>Teorema</u> (derivata della funzione inversa).

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$. f derivabile in I, f sia invertibile. Dunque esiste $f^{-1} : J \to I$

definita su $J = f(I)$ (J è un altro intervallo)

Poniamo $y_0 = f(x_0)$ $(y_0 \in J)$. Se $f'(x_0) \neq 0$

si ha f^{-1} è derivabile in y_0 e vale

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \leftarrow ?$$

SENZA DIMOSTRAZIONE

Anche in questo caso, per capire la formula pensiamo

che f sia una retta $f(x) = mx + q$

In questo caso f invertibile $\iff m \neq 0$. Chi

è f^{-1}? Posso dire che $f^{-1}(y) = x \iff$

$$mx + q = y \iff x = \frac{y-q}{m} \iff x = \frac{y}{m} - \frac{q}{m}$$

cioè $\quad f^{-1}(x) = \dfrac{x}{m} - \dfrac{q}{m}$ che è una retta di coeff. angolare $\dfrac{1}{m}$. (Scambiando ascisse e ordinate il coeff. angolare diventa il reciproco)

Se vogliamo rendere esplicita la formula di sopra dobbiamo dire come x_0 dipende da y_0 — cioè dire che $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Dunque

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} \qquad \forall\, y_0 \in J$$

Detto in forma "funzionale" $\quad \left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Osserviamo che, se si ammette che $(f^{-1})'(y_0)$ esiste allora la formula si ottiene dalla formula sulla composizione, dato che

$$f(f^{-1}(y)) = y$$ derivando risp. a y

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$ (FORMULA!)

TORNIAMO AL CALCOLO DELLE DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI.

GIÀ VISTO CHE

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \quad \text{se } n \in \mathbb{N}$$

- $$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}}$$ (derivata del reciproco)

$$= -n x^{-2n+n-1} = -n x^{-n-1}$$

Lo posso leggere:

$$\frac{d}{dx} x^{-n} = -n x^{-n-1} \iff$$

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}$$

- $f(x) = \sqrt[n]{x}$, su $x > 0$ (se n è dispari si possono poi recuperare anche le $x < 0$).

f è l'inversa di $g(x) = x^n$, ristretta a $]0,+\infty[$

dunque

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} \qquad \left(\text{formula su } g^{-1}\right)$$

$$g'(x) = n\,x^{n-1} \qquad \text{dunque}$$

$$f'(x) = \frac{1}{n\, f^{n-1}(x)} = \frac{1}{n\,\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$= \frac{1}{n}\, x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$$

Dunque

$$\frac{d}{dx}\, x^{\frac{1}{n}} = \frac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \underbrace{\frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}}_{\text{formula di prima con } \frac{1}{n} \text{ invece di } n}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

Allora se $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$ $(x > 0$, per sicurezza$)$

La sua derivata si può ottenere dalla derivata precedente e dalla formula sulla derivata della composizione. $f(x) = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n = g(\sqrt[m]{x})$

se $g(y) = y^n$. Si ottiene

$$f'(x) = g'(\sqrt[m]{x}) \frac{d}{dx} \sqrt[m]{x} = \overbrace{n \left(\sqrt[m]{x}\right)^{n-1}}^{n\, y^{n-1}} \cdot \overbrace{\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}}^{\text{derivata di } \sqrt[m]{\ }}$$

$$\frac{n}{m} x^{\frac{n-1}{m} + \frac{1}{m} - 1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - 1}$$

IN SOSTANZA

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^q = q\, x^{q-1} \quad \forall q \in \mathbb{Q}}$$

La formula va intesa per $x > 0$. Poi se

$q \geq 1$ si può prendere $x = 0$.

Per considerare gli $x < 0$ è preferibile non scrivere

x^q ma $\sqrt[m]{x^n}$ e vedere caso per caso

(funzione se m dispari)

ALTRE DERIVATE SI OTTENGONO RILEGGENDO I LIMITI NOTEVOLI.

- $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \longleftrightarrow \text{se } f(x) = e^x \quad f'(0) = 1$$

$\Downarrow$ RAPPORTO INCREMENTALE DI e^x TRA x e 0

$$\frac{d}{dx} e^x \Big|_{x=0} = 1$$

• $f(x) = e^x$, cerchiamo la derivata in x_0 generico.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0}\,\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}$$

Allora (se esiste)

$$f'(x_0) = e^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$$

($\frac{e^h-1}{h} \to 1$)

DUNQUE $\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$

Derivata del logaritmo:

<u>MODO 1</u> Dal limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \iff \lim_{y\to 1} \frac{\ln(y)}{y-1} = 1$$
$(y=1+x)$

RAPPORTO INCREM. DEL LOGARITMO TRA y e 1

$$\iff \left.\frac{d}{dx}\ln(x)\right|_{x=1} = 1$$

Prendiamo ora un punto $x_0 > 0$, generico.

$$\frac{\ln(x)-\ln(x_0)}{x-x_0} = \frac{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}{x-x_0} = \frac{\ln\left(\frac{x-x_0}{x_0}+1\right)}{x-x_0}$$

Faccio il limite per $x\to x_0$, pongo $y=\frac{x-x_0}{x_0}$

e trovo

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{x_0\, y} = \frac{1}{x_0}$$

$\ln(1+y)/y \to 1$

Dunque $\boxed{\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}}$ $(x>0)$

II° MODO $f(x) = \ln(x)$ è l'inverso di $g(x) = e^x$

Allora per la formula $\left(g'(x) = e^x = g(x) \right)$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

(sarebbe sbagliato scrivere $(f^{-1})' = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{e^x}$??

LUNEDì PROSSIMO NIENTE RICEVIMENTO

Derivata delle funzioni trigonometriche

$f(x) = \sin(x)$ — facciamo il rapp. incr. in $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin(x_0 + (x - x_0)) - \sin(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\frac{\sin(x_0)\cos(x-x_0)+\cos(x_0)\sin(x-x_0)-\sin(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\sin(x_0)\underbrace{\frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0}}_{\downarrow\ 0}+\cos(x_0)\underbrace{\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}}_{\downarrow\ 1}$$

LIMITI NOTEVOLI (mandando $x \to x_0$)

$\text{se } \frac{\cos(y)-1}{y^2} \to -\frac{1}{2}$

$\text{allora } \frac{\cos(y)-1}{y} \to 0$

Quindi $$\boxed{\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)}$$

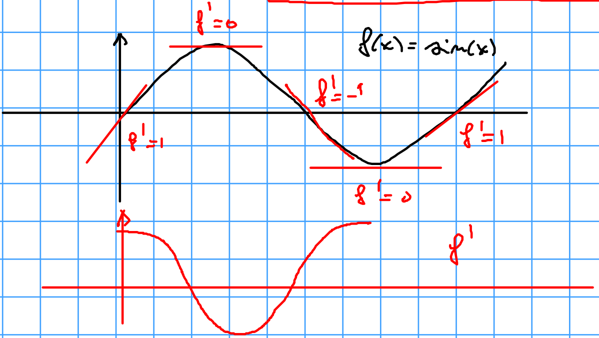
Facciamo $f(x) = \cos(x)$:

$$\frac{\cos(x)-\cos(x_0)}{x-x_0} = \frac{\cos(x_0+(x-x_0))-\cos(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\frac{\cos(x_0)\cos(x-x_0) - \sin(x_0)\sin(x-x_0) - \cos(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\cos(x_0)\underbrace{\frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0}}_{\to 0} - \sin(x_0)\underbrace{\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}}_{\to 1}$$

Dunque $$\boxed{\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)}$$

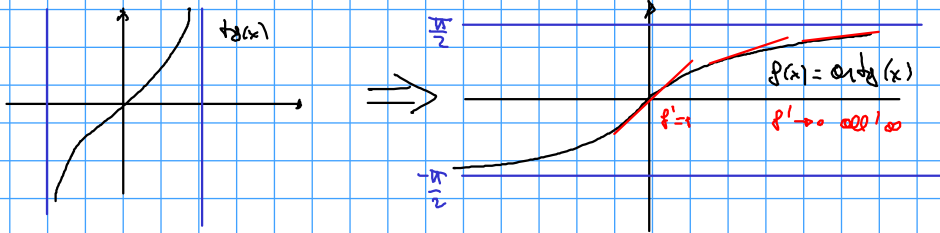


$$-\ \frac{d}{dx}\,tg(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Funzioni inverse delle trigonometriche

$f(x) = arctg(x)$ / inverso di tg ristretta a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



chiamo $g(x) = tg(x) \Rightarrow g'(x) = 1 + tg^2(x) = 1 + g^2(x)$

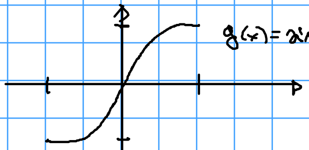
Per la formula su $(f^{-1})'$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{artg}(x) = \frac{1}{g'(\operatorname{artg}(x))} = \frac{1}{1+(\operatorname{tg}(\operatorname{artg}(x)))^2} =$$

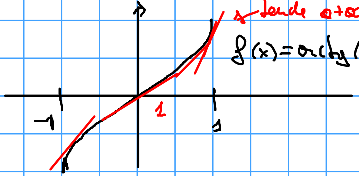
$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{artg}(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \arcsin(x)$ – è l'inverso di $g(x) = \sin(x)$

ristretta a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $f : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$\Longrightarrow$



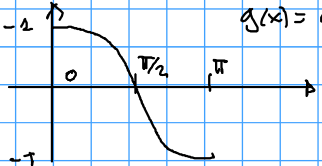
Per la formula $g'(x) = \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ se $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(f(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ se $x \neq \pm 1$

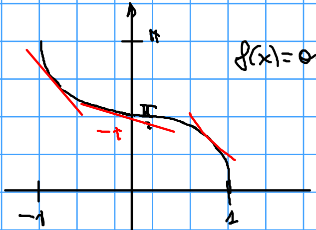
$$\boxed{\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{se } x \neq \pm 1}$$

$f(x) = \arccos(x)$ = inverso di $g(x) = \cos(x)$

ristretto a $[0, \pi]$



$\Longrightarrow$

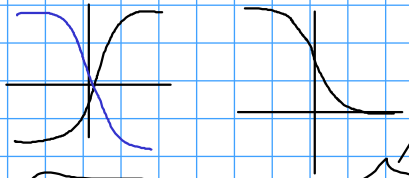


$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{-\sin(f(x))} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(f(x))}} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{se } x \neq \pm 1$$

In effetti c'è una relazione tra l'$\arccos(x)$ e l'$\arcsin(x)$

Guardando i grafici "sembra" che



$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$\left(\Rightarrow \frac{d}{dx} \arccos(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

VERA PERCHÉ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ ...

Potenza a esponente reale

$$f(x) = x^{\alpha} \qquad \text{dove } \alpha \in \mathbb{R}$$

Questa funzione in realtà è definita da

$$f(x) = e^{\alpha \ln(x)} \quad (x>0) = e^{g(x)}$$ dove $g(x) = \alpha \ln(x)$

Applicando la derivata della composizione:

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln(x)} \left(\frac{\alpha}{x}\right) = \frac{x^{\alpha}}{x} \cdot \alpha$$

$$= \alpha x^{\alpha - 1}$$

DUNQUE $\boxed{\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}}$ $x > 0$

anche $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Se $\alpha \geq 1$ la derivata c'è

anche in zero e fa zero.

Teorema (derivata della composizione)

Supponiamo che abbia senso la composizione $f \circ g$. *Supponiamo che* f *sia derivabile in* x_0 *e che* g *sia derivabile in* $g(x_0)$.
Allora $f \circ g$ *è derivabile in* x_0 *e*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

DIM

In termini sintetici, se f *e* g *sono derivabili ovunque:*

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

Teorema (derivata della funzione inversa)

Supponiamo che f sia invertibile e derivabile in tutto l'intevallo I.
Supponiamo che $f'(x:0(\neq 0$ e poniamo $y_0 := f(x_0)$
Allora f^{-1} è derivabile in y_0 e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

DISEGNO

In termini sintetici, se f' è ovunque diversa da zero

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

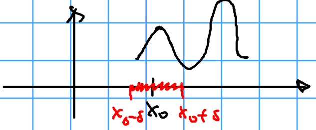
derivate delle funzioni elementari

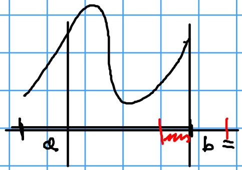
funzione	derivata	insieme di derivabilità
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{Z}, n < 0)$	nx^{n-1}	$]0, +\infty[$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$[0, +\infty[$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < 1)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, n \in \mathbb{Z}\}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arctan(x)$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Definizione Se $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ (I intervallo, per semplicità). Dico che x_0 è punto di massimo / minimo relativo per f su I, se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta$$

$$\big(f(x) \geq f(x_0) \qquad " \qquad " \qquad " \big)$$





ANCHE b è di max rel.

$I = [a,b]$

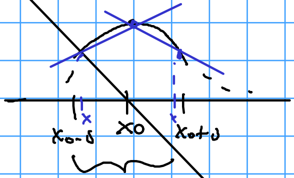
Teorema (di Fermat) Se $f: I \to \mathbb{R}$ ha un punto di massimo relativo (o di min. rel.) in x_0, x_0 non è estremo di I, f derivabile in x_0, ALLORA $f'(x_0) = 0$

Nota Un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$ si chiama punto STAZIONARIO.

Dunque i pti di max/min rel, che siano INTERNI a I (cioè non estremi), sono pti stazionari

Dim Prendo x_0, prendo δ come nella def. di max rel. Posso anche supporre che

$[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset I$ (perché x_0 NON È ESTREMO!



LA f È DEFINITA QUI DENTRO

So che x_0 È DI MAX SU

$[x_0-\delta, x_0+\delta] \Longrightarrow$

$f(x)-f(x_0) \leq 0$

$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

Se passo ai rapporti incrementali

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \qquad x \in]x_0, x_0+\delta]$$

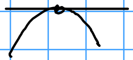
$$\text{"} \qquad \text{"} \qquad \geq 0 \qquad x \in [x_0-\delta, x_0[$$

Dato che la derivata $f'(x_0)$ esiste, ricavo:

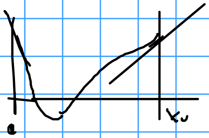
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$$ (limite di roba negativa è negativo)

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$$ (lo stesso con pos. al posto di neg.)

$\Rightarrow$ $f'(x_0)$ deve per forza essere zero.



ATTENZIONE



Se x_0 fosse estremo sarebbe falso

Dalla dim. si vede che

$x_0 = a$, max nel $\Rightarrow$ $f'(x_0) \leq 0$

$x_0 = b$, max nel $\Rightarrow$ $f'(x_0) \geq 0$

Definizione (massimi e minimi relativi)

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di A. Diremo che x_0 è un **punto di massimo (minimo) relativo per f** se

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in A \; |x - x_0| < \delta \to f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0)).$$

(esiste $\delta > 0$ tale che x_0 è un punto di massimo (minimo) per f ristretta a $A \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$). DISEGNO

In tal caso $f(x_0)$ si dice massimo relativo (minimo relativo) per f.

Teorema (di Fermat)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo e sia x_0 un punto di I ***diverso dagli estremi*** *di I. Se x_0 è un punto di massimo oppure minimo relativo per f e se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.*

DIM

Osservazione

Tutte le ipotesi del teorema di Fermat sono necessarie ESEMPI.

Dunque i punti di massimo e minimo relativo (tra cui quelli assoluti) vanno cercati:

- Tra i punti dell'intervallo aperto in cui f è derivabile e f' fa zero.
- Tra i punti in cui f non è derivabile.
- Tra gli estremi dell'intervallo.

Definizione

Un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$ si dice **punto stazionario per f**.

Il teorema di Fermat afferma dunque che i punti di massimo/minimo relativo INTERNI all'intervallo (cioè non estremi) sono punti stazionari per f

Osservazione

Non è vero in generale che i punti stazionari sono sempre punti di massimo o minimo relativo, come mostra la funzione $f(x) = x^3$ x^3. Il punto 0 è di *flesso* per la funzione x^3 (c'é un cambio tra concavità e convessità ...)