Analisi Matematica 1
Diciassettesima lezione

prof. Claudio Saccon

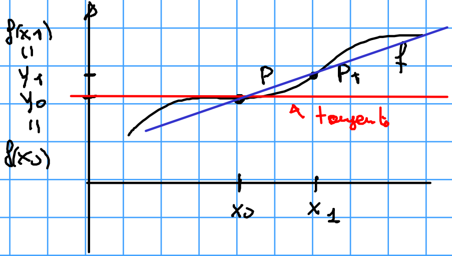
Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

3 dicembre 2009

Derivata.

Introduzione geometrica ~ idea di tangente al grafico di una funzione in un punto.

Prendiamo una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$



Considero $P = (x_0, y_0)$ sul grafico: $y_0 = f(x_0)$

Voglio "definire" cosa è

la retta tangente al grafico di f, nel punto P

Per arrivarci introduco un secondo punto $x_1 \neq x_0$

e considero $P_1 = (x_1, y_1)$ dove $y_1 = f(x_1)$

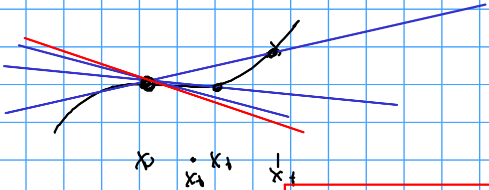
So tracciare la retta passante per P e P_1 (retta blu)

Tale retta ha equazione

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \longleftrightarrow y = y_0 + \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

cioè $\quad y = f(x_0) + \boxed{\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}(x-x_0)$

RETTA PASSANTE PER $(x_0, f(x_0))$ e PER $(x_1, f(x_1))$



Se muovo $x_1 \to x_0$ la retta diventa sempre "più simile" alla retta tangente

DUNQUE SE esiste $\boxed{m = \lim_{x_1 \to x_0} \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}$

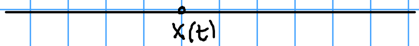
tale m rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente; la retta tangente per ha equazione

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

Il numero $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} = R(x_0,x_1)$ si chiama RAPPORTO INCREMENTALE DI f tra x_0 e x_1. C'è un buon motivo (<u>geometrico</u>) di considerare $\lim_{x_1 \to x_0} R(x_0,x_1)$

<u>ALTRO MOTIVO</u> (di tipo fisico) per fare tale limite. legato al concetto di VELOCITÀ (istantanea).

Abbiamo un punto che si muove su una retta - sappiamo che all'istante t la sua posizione è $x(t)$



Prendiamo due istanti $t_0 \neq t_1$. Il rapporto

$$\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$ è la "velocità media" di $x(t)$ nell'intervallo t_0, t_1.

È naturale ritenere che $\lim_{t_1 \to t_0} \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$ rappresenti la "velocità del punto all'istante t_0"

Di nuovo possiamo attraverso il limite di un rapporto incrementale.

Ogni qualvolta si vuole definire "la variazione istantanea" di una funzione si è portati a fare tale limite

<u>Definizione</u> Data f definita vicino a un pto x_0, dico

che è derivabile se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$ Tale limite si chiama

derivata di f nel punto x_0 e si indica con

$$f'(x_0) \quad \Big(\text{e anche } \frac{d}{dx} f(x_0), \; D f(x_0), \; \dot{f}(x_0)$$

Se tale limite si può fare in ogni punto di un intervallo

I diremo che f è derivabile in I, e in questo

caso risulta definita la funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$

- Per ogni x $f'(x)$ indica quanto rapidamente varia la f vicino a x – quale è il coeff. della tangente in $(x, f(x))$

Proprietà della derivata

(1) Se f è derivabile in un punto $x_0 \Longrightarrow$
f è continua in x_0

Dim. Se esiste $m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $m \in \mathbb{R}$

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[\left(f(x) - f(x_0) \right) + f(x_0) \right] =$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0) \right] =$$

$$m \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

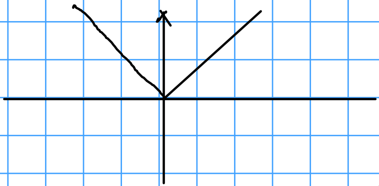
(2) Il viceverso non vale: $f(x) = |x|$ è continua in $x = 0$, ma non è derivabile in $x = 0$.

Per vederlo facciamo il rapporto incrementale in $x=0$

$$R(0,x) = \frac{|x|-|0|}{x-0} = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Dunque $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$; $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$

sono diversi e dunque non esiste il limite.



ci sono una "tangente destra" che è la retta $y=x$, e una "tangente sinistra" che è $y=-x$. Il grafico di $f(x)=|x|$ ha "uno spigolo" in $x=0$.

Generalizzazione $f(x) = |x|^{\alpha}$ con $\alpha > 0$.

f è sicuramente continua e $f(0)=0$. Vediamo per quali

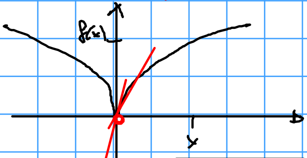
α f è derivabile. Devo fare

$$R(0,x) = \frac{|x|^\alpha - |0|^\alpha}{x-0} = \frac{|x|^\alpha}{x} = \begin{cases} |x|^{\alpha-1} & \text{se } x>0 \\ -|x|^{\alpha-1} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Se faccio separatamente il limite destro/sinistro per $x \to 0$

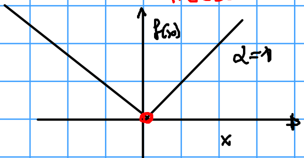
	$x \to 0^+$	$x \to 0^-$
$\alpha > 1$	0^+	0^-
$\alpha = 1$	1	-1
$0 < \alpha < 1$	$+\infty$	$-\infty^-$

CUSPIDE



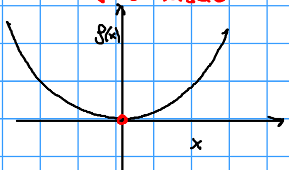
$\boxed{0 < \alpha < 1}$

SPIGOLO



$\boxed{\alpha = 1}$

f è "liscia"



$\boxed{\alpha > 1}$

Altro modo di "interpretare" la derivabilità.

f derivabile in x_0 $\iff$ $\underset{\mathbb{R}}{\exists}\, m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$\iff$ $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m + o(1) \iff$

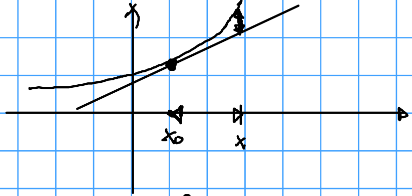
$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0) + o(1)(x - x_0) \iff$

(★) $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)$

f "somiglia a una retta" $\leftrightarrow$ f si può scrivere come

la retta (tangente) $y = m(x - x_0) + f(x_0)$

A MENO DI UN $o(x - x_0)$



lo scarto tra $f(x)$ e la retta è un infinitesimo di ordine superiore a $x-x_0$

Quindi se f è derivabile in x_0 e $m = f'(x_0)$, la retta $y = f(x_0) + m(x-x_0)$, approssima f a meno di $o(x-x_0)$: (cioè vale $(\star)$).

Vale anche il viceverso. Se $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + m(x-x_0) + o(x-x_0) \iff$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \leftarrow$$ (questo tende a zero per def. di o piccolo)

al limite $(x \to x_0)$ trovo che $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to m$

(Intermezzo)

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(tg^2(x))}{\ln(\cos(x))}$

(2) $\lim_{x \to \infty} 2^x \left(\ln(4-2^x+4^x) - \ln(1+2^x+4^x)\right)$

Facciamo entrambi i limiti con gli o piccoli (per vedere come si fa)

(1) $tg(x) = ??$ Dato che

$\lim_{x \to \infty} \frac{tg(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)} = 1$

possiamo dire che $\boxed{tg(x) = x + o(x)}$

Allora $tg^2(x) = (x+o(x))^2 = x^2 + \underset{\underset{\underset{o(x^2)}{\shortparallel}}{2o(x^2)}}{\underbrace{2x\,o(x)}} + \underset{o(x^2)}{\underbrace{o(x)^2}} = x^2 + o(x^2)$

(oppure $(x+o(x))^2 = x^2\left(1+\frac{o(x)}{x}\right)^2 = x^2(1+o(1))^2 = x^2(1+o(1))$
$= x^2 + o(x^2)$)

Dunque $\boxed{tg^2(x) = x^2 + o(x^2)}$. Andando avanti

$$\sin(tg^2(x)) = \sin(\underbrace{x^2+o(x^2)}_{y}) = y + o(y) =$$

$$x^2 + o(x^2) + o(x^2+o(x^2)) = x^2 + o(x^2)$$

Passiamo al denominatore:

$$\ln(\cos(x)) = \ln\Big(1\underbrace{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}_{y}\Big) = y + o(y) =$$

$$-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2). \quad \text{Finalmente}$$

$$\frac{\sin(\operatorname{tg}^2(x))}{\ln(\cos(x))} = \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \longrightarrow \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

(2)

$$2^x\left(\ln\left(4-2^x+4^x\right) - \ln\left(1+2^x+4^x\right)\right) \quad (\text{per } x \to +\infty)$$

$$= 2^x \ln\Bigg(\underbrace{\frac{4-2^x+4^x}{1+2^x+4^x}}_{\text{tende a 1 se } x \to +\infty}\Bigg) =$$

$$= 2^x \ln\left(1 + \frac{4-2^x+4^x}{1+2^x+4^x} - 1\right) =$$

$$= 2^x \ln\left(1 + \frac{4-2^x+\cancel{4^x}-1-2^x-\cancel{4^x}}{1+2^x+4^x}\right) =$$

$$= 2^x \ln\left(1 + \frac{3-2\cdot 2^x}{1+2^x+4^x}\right)$$

$\longrightarrow$ tende a zero per $x \to +\infty$

$$= 2^x \ln\left(1 - \frac{2\cdot 2^x\,(1+o(1))}{4^x\,(1+o(1))}\right) = 2^x \ln\left(1 - \frac{2}{2^x}(1+o(1))\right)$$

$$= 2^x \ln\Bigg(1 \underbrace{- \frac{2}{2^x} + o\left(\frac{2}{2^x}\right)}_{y}\Bigg) = 2^x\left(y + o(y)\right)$$

$$= 2^x\left(-\frac{2}{2^x} + o\left(\frac{2}{2^x}\right) + o\left(-\frac{2}{2^x} + o\left(\frac{2}{2^x}\right)\right)\right) =$$

$$= 2^x\left(-\frac{2}{2^x} + o\left(\frac{2}{2^x}\right)\right) = -2 + o(2) \longrightarrow -2$$

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo e sia $x_0 \in I$

Definizione (Derivata)

Diciamo che f è **derivabile in x_0** se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

che viene allora detto **derivata di f in x_0** e indicato con uno dei simboli

$$f'(x_0) \qquad \dot{f}(x_0) \qquad \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x = x_0}$$

Diciamo che f è **derivabile in I** se f è derivabile in ognix_0 di I. In questo caso risulta definita la nuova funzione $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ detta **derivata di f**.

Definizione (derivate di ordine superiore)

Se f è derivabile in I e a sua volta f' risulta derivabile in x_0 (in I) allora la derivata di f' (a rigore $(f')'$) viene detta **derivata seconda** di f e indicata con f''.

Analogamente si definisce la derivata terza come $f''' = (f'')'$ e così via.

Per indicare la generica derivata di ordine n si utilizzano le scritture

$$f^{(n)} \qquad \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

(nella prima notazione le parentesi sono necessarie per non confondere la derivazione con la potenza)

Per convenzione la derivata di ordine zero $f^{(0)}$ coincide con la funzione di partenza f

Osservazione (derivata e retta tangente)

- Se f è derivabile in x_0 allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$ DIM

cio'e la retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approssima la funzione a meno di un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$.

- Viceversa se $y = m(x - x_0) + q$ è una retta passante per $(x_0, f(x_0))$ tal che

$$f(x) = m(x - x_0)q + o(x - x_0)$$

allora necessariamente $p = f(x_0)$, f è derivabile in x_0 e $m = f'(x_0)$. DIM

Definizione (retta tangente)

Se f è derivabile in x_0, la retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ viene detta retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Teorema

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 DIM

Nota

Il teorema precedente non è invertibile.
La funzione $f(x) = |x|$ fornisce un esempio di funzione continua che, almeno nello zero, non è derivabile. DIM

Teorema (linearità)

Supponiamo che f e g siano derivabili in x_0 e che alpha e β siano due numeri reali. Allora $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0 e

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

La dimostrazione è conseguenza immediata dell proprietà dei limiti.

Linearità dell'operazione di derivata:

Se f e g sono derivabili in x_0 (in I) e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora la combinazione lineare $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0 (in I) e la sua derivata è la combinazione lineare delle derivate:

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

(IMMEDIATA CONSEGUENZA DELLE PROPRIETÀ DEI LIMITI)

Derivata del prodotto. Siano f, g derivabili in x_0 (in I). Allora la funzione prodotto $f \cdot g$ è derivabile in x_0 (in I) e vale la formula

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

<u>Dim</u> Per calcolare $(f\cdot g)'(x_0)$ devo fare

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0} =$$

(tutti i passaggi funzionano se hanno senso - cosa che si vede alla fine)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x_0) + f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \underset{\substack{\downarrow \\ f(x_0)}}{f(x)}\ \underset{\substack{\downarrow \\ g'(x_0)}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} + g(x_0)\lim_{x\to x_0} \underset{\substack{\downarrow \\ f'(x_0)}}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

(se f è der. $\Rightarrow f$ continua)

$$= f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)\,g(x_0) \qquad \#$$

Derivata del reciproco.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Dim. Faccio il limite del rapp incrementale di $1/f$:

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)\, f(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{f(x)\, f(x_0)}$$

$$\xrightarrow{(x \to x_0)} -f'(x_0) \frac{1}{f(x_0)^2} \qquad (\text{se } f(x_0) \neq 0)$$

#

CONSEGUENZA

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{se } g(x) \neq 0$$

Infatti $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f' \cdot \frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' =$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} + f(x)\,\frac{\left(-g'(x)\right)^2}{g(x)^2} = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2} \qquad \#$$

Calcolo delle derivate delle funzioni elementari

(1) $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$ costante). Allora per ogni x

$$f'(x) = 0 \qquad \left(\frac{c-c}{x-x_0} = 0 \to 0 \right)$$

(2) $f(x) = x$ Allora per ogni x

$$f'(x) = 1$$

Infatti $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \longrightarrow 1$ (se $x \to x_0$)

(3) $f(x) = x^2$. Dalla def di derivata

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{\cancel{(x-x_0)}(x+x_0)}{\cancel{(x-x_0)}} = x+x_0$$

che tende a $2x_0$ se $x \to x_0$. Dunque

$f'(x) = 2x$.

Lo posso anche vedere come conseguenza della formula sul prodotto.

$$f(x) = x \cdot x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x \quad \#$$

(4) $f(x) = x^n$. Dalla definizione

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\dots+x_0^{n-2}x+x_0^{n-1})}{x-x_0}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1} \xrightarrow{x \to x_0}$$

$$\underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{n \text{ addendi}} = n x_0^{n-1}$$

DUNQUE $f'(x) = n x^{n-1}$. Questa formula la posso anche dedurre dalla derivata del prodotto, usando l'induzione. Io dico che

"per ogni n $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$"

LO VERIFICO PER $n = 1$: $\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} x^1 = 1 x^0 = 1$

VERA. MOSTRO CHE DA n SI PASSA A $n+1$

Se vale $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$, allora

$$\frac{d}{dx} x^{n+1} = \frac{d}{dx}\left(x^n \cdot x\right) = \frac{d}{dx} x^n \cdot x + x^n \frac{d}{dx} x =$$

(regola del prodotto)

$$= n x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = n x^n + x^n = (n+1) x^n$$

(passo induttivo) quello che volevo.

DUNQUE se $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}}$

Teorema (derivata del prodotto)

Supponiamo che f e g siano derivabili in x_0.
Allora fg è derivabile in x_0 e

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

DIM

In termini sintetici, se f e g sono derivabili ovunque:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Teorema (derivata del quoziente)

Supponiamo che f e g siano derivabili in x_0 e che $g(x_0) \neq 0$.
Allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

DIM

In termini sintetici, se f e g sono derivabili ovunque e $g \neq 0$ ovunque:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

In particolare, se f è diversa da zero in x_0 (ovunque)

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} \qquad \left(\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}\right)$$