Analisi Matematica 1
Sedicesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

27 novembre 2009

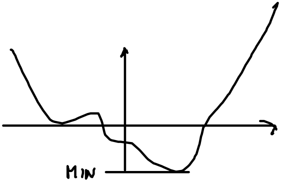
· Varianti del teorema di Weierstrass. su $\mathbb{R}$

Teorema Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ (-\infty), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \ (-\infty)$$

allora f ha minimo (massimo).

Viceversa è chiaro che non ha massimo (non ha minimo)



Dim. Cerco di ricondurmi a un intervallo limitato e chiuso — fuori da un intervallo abbastanza grande i valori di f non "influenzano il minimo". Precisamente

(1) dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ posso trovare un M abbastanza grande tale che $\forall x \geq M \quad f(x) \geq f(0)$.

. Analogamente ci sarà un M' tale che

$$\forall x \leq M' \quad f(x) \geq f(0)$$

(questo perché $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$). Quindi

$$\text{se } x \notin [M', M] \Rightarrow f(x) \geq f(0).$$

Posso anche supporre $M > 0$, $M' < 0$, in modo che $0 \in [M', M]$

(2) Applico Weierstrass su $[M', M]$; so che esistono x_1 (e x_2) in $[M', M]$ tali che

$$\longrightarrow f(x_1) \leq f(x) \;(\leq f(x_2)) \qquad \forall x \in [M', M]$$

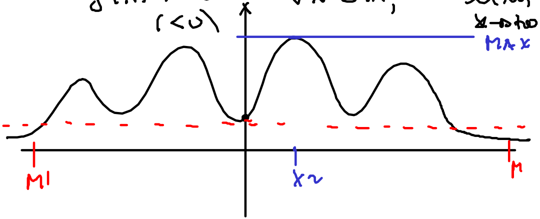
(3) Dimostro che x_1 è il minimo per f su $\mathbb{R}$ cioè

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(x_1). \qquad \text{Infatti}$$

- se $x \in [M', M]$ lo so
- se $x \notin [M', M]$ so che $f(x) \geq f(0) \geq f(x_1)$ (perché $0 \in [M', M]$) #

· <u>Altro risultato simile.</u> $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continua. Supponiamo

$f(x) > 0$ (<0) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$



Allora f ha massimo (minimo).

<u>Dim.</u> (1) trovo M, M' tali che $M' < 0 < M$ e

se $x \notin [M', M] \Rightarrow f(x) < f(0)$.

(2) Per W. esiste il max su $[M', M]$, cioè $\exists\, x_2 \in [M', M]$ per cui $f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [M', M]$

(3) x_2 è punto di massimo per f su tutto $\mathbb{R}$. Infatti se $x \in [M', M]$ $f(x) \leq f(x_2)$; se $x \notin [M', M]$

$f(x) \leq f(0) \leq f(x_2)$ (perché $0 \in [M', M]$)

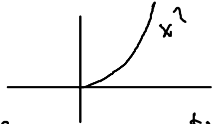
· Ultima questione:

Continuità di f^{-1}. Se f è continua ed è invertibile posso dire che f^{-1} è continua??

Ricordo che f ammette inversa (f^{-1}) se f è iniettiva e surgettiva. Quindi l'invertibilità dipende anche da dominio e codominio di f. Riguardo al codominio possiamo sempre restringerlo e pensare che coincida con l'immagine. Quindi

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è iniettiva possiamo convenire di chiamare inversa f^{-1} la funzione definita su $f(A)$
$f^{-1} : f(A) \to A$ che "inverte f" (dato $y \in f(A)$ si sceglie quell'unico x : $f(x) = y$

$f(x) = x^2$ su $[0, +\infty[$



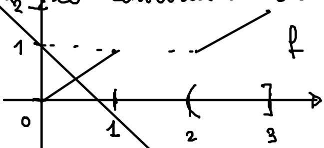
se la penso a valori in $[0, +\infty[$ la posso invertire e "$f^{-1} = \sqrt{x}$"

Quindi per parlare di inversa basta f iniettiva.

Per trovare chi è l'inversa serve anche trovare chi è $f(A)$ (che è il dominio di f^{-1}).

In generale, la continuità di f^{-1} È FALSA

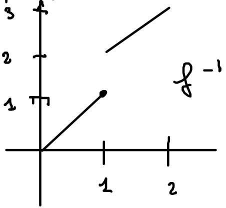
Per esempio



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x-1 & \text{se } 2 < x \le 3 \end{cases}$$

DOMINIO $A = [0,1] \cup]2,3]$. f È INIETTIVA (2 NON C'È NEL DOMINIO)

$f(A) = [0,2]$. Facciamo il grafico di f^{-1}



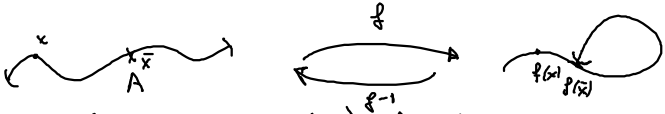
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ y+1 & \text{se } 1 < y \le 2 \end{cases}$$

f^{-1} DISCONTINUA IN $y=1$

· Il problema sta nel dominio A che è "fatto male"

In una variabile il problema si sistema dicendo che A deve essere un intervallo (lo vediamo subito).

Notiamo che in più variabili il il problema è difficile



SI VEDE (a livello intuitivo) che f è continua, invertibile

però f^{-1} NON È CONTINUA (f^{-1} "strappa" l'anello)

La questione (in $\mathbb{R}$) passa attraverso la seguente caratterizzazione nel caso delle FUNZIONI MONOTONE.

<u>Teorema</u> Supponiamo I intervallo e che $f : I \to \mathbb{R}$ monotona. Sono fatti equivalenti

(a) f manda intervalli in intervalli (se $J \subset I$ int. $\Rightarrow f(J)$ int.)

(b) f è continua.

Dim. (b) $\Rightarrow$ (a) l'abbiamo già visto (è vero anche se f non è monotona)

(a) $\Rightarrow$ (b). Per esempio consideriamo il caso f crescente. Se non fosse continua in $x_0 \in I$ avrei (almeno) una fra le due

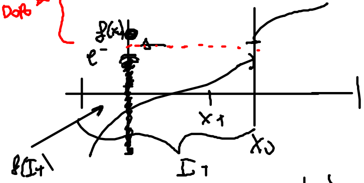
$$\underbrace{\ell^- = \lim_{x \to x_0^-} f(x) < f(x_0)}_{(1)} \quad \text{OPPURE} \quad \underbrace{\lim_{x \to x_0^+} f(x) > f(x_0)}_{(2)}$$

Nel caso (1) l'intervallo $I_1 = \{x \in I, x \le x_0\}$ viene trasformato da f in qualcosa che non è un intervallo. Infatti:

$f(x_0) \in f(I_1)$, $]\ell^-, f(x_0)[\cap f(I_1) = \emptyset$,

per $x_1 < x_0$ $f(x_1) \in f(I_1)$

VEDI DOPO *



QUINDI CI SONO ALMENO DUE PUNTI $f(x_0)$ e $f(x_1)$ CHE SONO IN $f(I_1)$, MA C'È UN P.TO IN MEZZO CHE NON È IN $f(I_1)$

$f(I_1)$ NON È UN INTERVALLO.

Se viceversa mando intervalli in intervalli DEVE essere continua. Il caso (2) è analogo.

(*) LO DICO MEGLIO. Voglio far vedere che $f(I_1)$ non è un intervallo $f(x_0) \in f(I_1)$. tutti i punti $x_1 < x_0$ hanno $f(x_1) \leq l^-$ perché $l^- = \sup_{x<x_0} f(x)$. Questo dice che $f(I_1)$ contiene $f(x_0)$, contiene altri punti $f(x_1) < f(x_0)$, $(x_1 < x_0)$ ma non contiene l'intervallo $]l^-, f(x_0)[$, dunque NON È UN INTERVALLO.

Se mi metto su un intervallo risolvo il problema della continuità di f^{-1}.

Teorema Supponiamo che $f : I \to \mathbb{R}$ sia continua e che I sia un intervallo. Allora
(1) $J = f(I)$ è un intervallo
(2) $f^{-1} : J \to I$ è continua.
inoltre f "manda" estremi di I in estremi di J e viceversa (DA PRECISARE)

. Il risultato sopra segue da

Teorema $f : I \to \mathbb{R}$, continua, allora

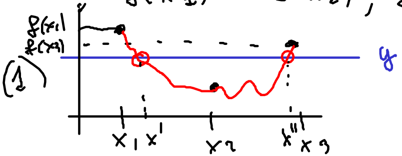
f è iniettiva $\iff$ f è strettamente monotona

Dim. $\Leftarrow$ OVVIO. Dimostro $\Rightarrow$

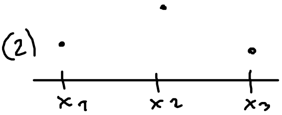
Per assurdo suppongo che f sia continua ma non sia strett. monotona. (f non è né crescente né decrescente). Ne segue che ci sono almeno tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ tali che (lo si può vedere esaminando le def e negandole formalmente)

$f(x_1) > f(x_2)$; $f(x_3) > f(x_2)$ OPPURE

$f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_3) < f(x_2)$



oppure



Prendiamo il caso (1). Scelgo y tale che

$f(x_2) < y < f(x_1)$ e anche $f(x_2) < y < f(x_3)$

. Per il t. val intermedi esiste $x' \in]x_1, x_2[$ tale che $f(x') = \ell$
Analogamente esiste $x'' \in]x_2, x_3[$ tale che $f(x'') = \ell$
MA ALLORA $x' \neq x''$, $f(x') = f(x'')$ $\Rightarrow$ HO CONTRADDETTO
l'iniettività di f. #

Dimostriamo il teorema su f^{-1}. Abbiamo $f : I \to \mathbb{R}$
continua e iniettiva. Sappiamo già (t. val. intermedi) che $J = f(I)$ è un intervallo. Dall'ultimo teorema ricaviamo che f è strettamente monotona. La funzione inversa $f^{-1} : J \to I$ è anche lei strettamente monotona (per esercizio...). Dato che f^{-1} manda l'intervallo J nell'intervallo I esso è continua #

(L'idea guida è che una discontinuità di f^{-1} produrrebbe un "buco" nel dominio di f. Tutto questo perchè ci si può ricondurre a funzioni monotone)

Teorema

Sia I un intervallo di estremi a e b (che possono essere finiti o infiniti e possono essere o non essere in I) e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora

- *Se f è continua allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo.*
- *Viceversa se $J = f(I)$ è un intervallo e se f è monotona, allora f è continua. Inoltre in questo caso gli estremi α e β di J sono dati da*

$$\alpha = \lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \beta = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

se f è crescente, mentre se f è decrescente

$$\beta = \lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \alpha = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Dunque una funzione monotona è continua se e solo se trasforma intervalli in intervalli.

DIM

· Per esempio dai Teoremi fatti si deduce l'esistenza di $g(x) = \sqrt[n]{x}$, def. su $[0,+\infty[$ (per x n e dispari si recupera anche $]-\infty, 0]$) COME SI FA?

(1) $f(x) = x^n$ è una funzione continua

(2) se restringo f a $\underbrace{[0\ +\infty[}_{I}$, f è strett. crescente dunque iniettiva.

(3) Per i teoremi esiste $f^{-1} : f(I) \to I$

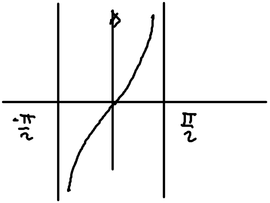
(4) chi è $f(I) = ?$ $f(I)$ è l'intervallo di estremi

$$f(0) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

DUNQUE è definita $g : \underbrace{[0,+\infty[}_{J} \to \underbrace{[0,+\infty[}_{I}$ tale che

$g(x)^n = x$, $\forall x \geq 0$; $g(x^n) = x$ $\forall x \geq 0$; g È LA RADICE n-ESIMA

· Altro esempio (arcotangente) $f(x) = tg(x)$ ristretta a $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



So che f è crescente strettamente e che

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$$

Usando i teoremi ricavo che esiste

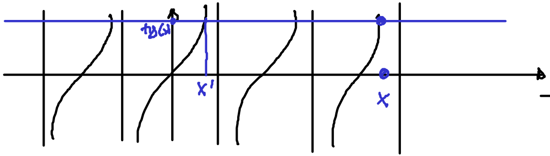
$f^{-1} : J \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dove

J è l'intervallo di estremi $-\infty, +\infty$. Dunque è definita

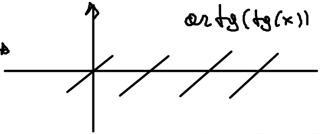
$\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to]-\pi, \pi[$ tale che

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ tg(\mathrm{arctg}(x)) = x$ / $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ \ \mathrm{arctg}(tg(x)) = x$

NOTA se x è generico $\mathrm{arctg}(tg(x)) \neq x$ $\big(= \underbrace{x - k\pi}_{\in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$



$\mathrm{arctg}(tg(x))$



Continuità dell'inversa su un intervallo

Teorema

*Sia I un **intervallo** (che può essere aperto / chiuso / semiaperto / limitato / illimitato).*
*Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione **continua**.*

Allora f è iniettiva se e solo se f è strettamente monotona.

DIM

Una immediata conseguenza dei due teoremi precedenti è

Teorema (Continuità dell'inversa su un intervallo)

Sia I un ***intervallo*** *e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione* ***continua e iniettiva*** .

Allora, posto $J = f(I)$ (che è un intervallo), esiste $f^{-1} : J \to I$ e f^{-1} ***è continua***.

DIM

Da tutto quanto fatto finora le funzioni "elementari" sono tutte continue dove definite. Quindi sono continue:

- $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, se P e Q sono polinomi, nell'insieme $\{x : Q(x) \neq 0\}$;
- $f(x) = \sqrt[n]{(x)}$ in $\mathbb{R}$ se n è dispari e in $[0, +\infty[$ se n è pari;
- $f(x) = A^x$, dove $A > 0$, in $\mathbb{R}$;
- $f(x) = \log_A(x)$, dove $A > 0$ e $A \neq 1$, in $]0, +\infty[$;
- $f(x) = x^\alpha$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$, in $]0, +\infty[$;
- $f(x) = \sin(x)/\cos(x)$, in $\mathbb{R}$; $f(x) = \tan(x)$ in $\{x : \cos(x) \neq 0\}$;
- $f(x) = \arcsin(x)/\arccos(x)$ in $[-1, 1]$; $f(x) = \arctan(x)$ in $\mathbb{R}$;

e tutte le combinazioni ottenibili dalle funzioni sopra mediante somme prodotti quozienti o composizioni.