Analisi Matematica 1
Quindicesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

26 novembre 2009

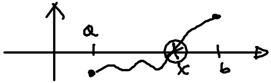
· Proprietà delle funzioni continue su un intervallo

⊗ Teorema degli zeri (dei valori intermedi)

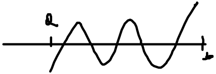
· Teorema di Weierstrass

· Esistenza e continuità della funzione inversa

Teorema (degli zeri). Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (o viceversa) allora esiste un punto $x \in]a,b[$ tale che $f(x) = 0$



(x non è unico in generale)



· <u>Dim.</u> La dim. uso il "metodo di bisezione". Si procede per passi (in generale infiniti).

(1) Prendo il punto medio di $[a,b]$, $c = \frac{a+b}{2}$

Ci sono tre possibilità:

(i) $f(c) < 0$, allora pongo $a_1 = c$, $b_1 = b$

(ii) $f(c) = 0 \to$ il teorema è dimostrato, $x = c$

(iii) $f(c) > 0$, allora pongo $a_1 = a$, $b_1 = c$
(se non ho finito)

IN QUESTO MODO TROVO un intervallo $[a_1, b_1]$ tale che $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$, $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$

(2) Ripeto lo stesso procedimento su $[a_1, b_1]$: introduco $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, ci sono tre casi

(i) $f(c_1) < 0$, allora pongo $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$

(ii) $f(c_1) = 0$ ho finito $(x = c_1)$

(iii) $f(c_1) > 0$, allora pongo $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$

- Itero il procedimento: o ad un certo punto trovo un c_n tale che $f(c_n)=0$ ($\to$ FINE), oppure non mi fermo mai; in questa seconda eventualità ho costruito, per ogni n, un a_n e un b_n tali che

(1) $$f(a_n)<0\,,\quad f(b_n)>0$$

(2) $$[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]\subset[a_{n-2},b_{n-2}]\subset\cdots\subset[a,b]$$

cioè $a_n \geq a_{n-1}$ ($\{a_n\}$ è crescente)

$b_n \leq b_{n-1}$ ($\{b_n\}$ è decrescente)

inoltre $a \leq a_n < b_n \leq b$ ($\{a_n\}$, $\{b_n\}$ LIMITATE)

(3) $$b_n-a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})=\frac{1}{4}(b_{n-2}-a_{n-2})=\cdots=\frac{1}{2^n}(b-a)$$

Dalla (2) deduco che $\{a_n\}$ ha limite λ (pari al sup a_n) e $\{b_n\}$ ha limite μ (pari all'inf b_n) — PER MONOTONIA

inoltre $a\leq\lambda\leq\mu\leq b$

· Dalla (3) deduco che $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n) = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\right)(b-a)=0$

da cui $\lambda=\mu$. Se chiamo $x=\lambda=\mu$ ho trovato

$a_n \longrightarrow x$, $b_n \longrightarrow x$.

Voglio far vedere che $f(x)=0$. Dalla (1) ottengo

$$f(a_n)<0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$$

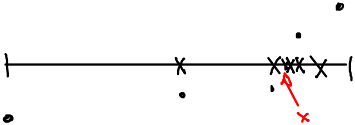
Ma essendo f continua $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x)$; dunque $f(x)\leq 0$
(dato che $a_n \to x$)

Per lo stesso motivo

$$\left.\begin{array}{l} f(b_n)>0 \implies \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0 \\ f \text{ continua, } b_n \to x \implies \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x) \end{array}\right\} \implies f(x)\geq 0$$

$f(x)=0$

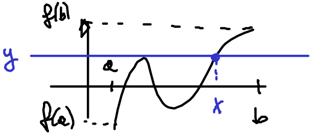
FINE DIM.



· CONSEGUENZE DEL TEOREMA DEGLI ZERI

Generalizzazione Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua; se $y\in\mathbb{R}$ e se $f(a)<y$, $f(b)>y$ $\Longrightarrow$ esiste $x\in\,]a,b[$ tale che $f(x)=y$

(se $y=0$ ho il teorema degli zeri)



"f assume tutti i valori compresi tra $f(b)$ e $f(a)$"

ATTENZIONE valore $= y$

un valore è "una ordinata" - dire che y è assunto vuol dire che c'è una x da cui proviene, cioè $\exists x: f(x)=y$

DIM. Prendo $g(x)=f(x)-y$; tale g è continua,

$g(a)=f(a)-y<0$, $g(b)=f(b)-y>0 \Longrightarrow \exists x: g(x)=0$

e cioè $\exists x: f(x)-y=0 \iff \exists x: f(x)=y$ #

· Altra conseguenza: f continua manda intervalli in intervalli:

Se $f : I \to \mathbb{R}$, f continua e I intervallo $\Longrightarrow J := f(I)$ è un intervallo.

Dim. Come posso caratterizzare gli intervalli!? Vale il fatto seguente:

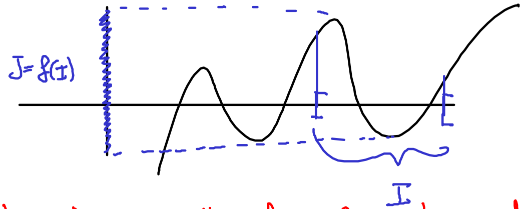
(*) $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo $\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{se } x < y < z \in \mathbb{R} \\ \quad x, z \in I \end{array} \Rightarrow y \in I \right]$

(ogni volta che I contiene due pti' x e z $\Longrightarrow I$ contiene ogni punto y compreso tra x e z)

Vediamo che f trasforma I intervallo in $f(I)$ intervallo!

Per dim. che $f(I)$ è un intervallo prendo due pti in $f(I)$ (cioè prendo $x_1, x_2 \in I$ e considero $f(x_1)$ e $f(x_2)$) prendo y compreso tra di loro (cioè $f(x_1) < y < f(x_2)$)

· Devo dimostrare che $y \in f(I)$. Ma per il teorema degli zeri generalizzato $\Rightarrow \exists\, x$ tra x_1 e x_2 per cui $f(x) = y$ ($x \in I$ dato che I è un intervallo) e questo significa che $y \in f(I)$. Questo dimostra l'affermazione.



Nota Non è detto che gli estremi di $f(I)$ siano immagini degli estremi di I – gli estremi di $f(I)$ sono

$$\inf_I f \qquad \text{e} \qquad \sup_I f$$

(può essere vero se ci sono altre ipotesi)

Teorema degli zeri

.

Teorema

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ *e sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione* ***continua****. Se* $f(a)$ *e* $f(b)$ *sono diversi da zero e* ***discordi****, allora* f ***ha uno zero****:*

$$\exists x \in]a,b[: f(x) = 0$$

Notiamo che l'ipotesi sopra si può esprimere dicendo $f(a)f(b) < 0$.

DIM

· <u>Teorema di Weierstrass</u> (esistenza di max/min)

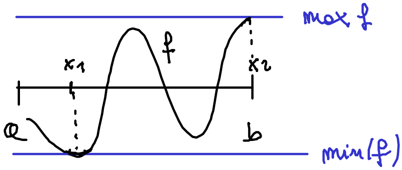
Dati $a<b$ reali, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, allora "f ammette massimo e minimo su $[a,b]$", cioè esistono x_1, x_2 in $[a,b]$ tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad \forall x \in [a,b]$$

$\to$ x_1 è un punto di minimo, $f(x_1)$ è il minimo

$\to$ x_2 è un punto di massimo, $f(x_2)$ è il massimo

(x_1 e x_2 non sono necessariamente unici)

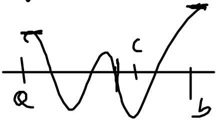


. Discorso preliminare alla dim. • Se A_1 e A_2 sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\sup(A_1 \cup A_2) = \max(\sup A_1, \sup A_2)$

• Analogamente se $f : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{R}$ (non c'entra che f sia continua)

$$\Rightarrow \sup_{A_1 \cup A_2} f = \max\left(\sup_{A_1} f, \sup_{A_2} f\right)$$

per esempio se $a < c < b$ $\quad \sup_{[a,b]} f = \max\left(\sup_{[a,c]} f, \sup_{[c,b]} f\right)$



(segue dalla def. di sup. ...)

DIM. Dimostriamo l'esistenza del massimo (il minimo è simile)

Per dimostrare che esiste il massimo devo trovare un pto x_2 in $[a,b]$ tale che $f(x_2) = \sup_{[a,b]} f$ ~~e~~ lo chiamo M

x_2 lo cerco mediante la bisezione.

· (1) Prendo $c = \frac{a+b}{2}$; so che (per il discorso preliminare)

$$\sup_{[a,b]} f = \underbrace{M = \sup_{[a,c]} f}_{(i)} \quad \text{oppure} \quad \underbrace{M = \sup_{[c,b]} f}_{(ii)}$$

- nel caso (i) pongo $a_1 = a$, $b_1 = c$
- nel caso (ii) pongo $a_1 = c$, $b_1 = b$

(potrebbero essere vere entrambe – allora scelgo il caso i)

(2) prendo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ e definisco

- se $\sup_{[a_1,c_1]} f = M$ $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$
- se $\sup_{[c_1,b_1]} f = M$ $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$

ITERO ...

TROVO due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tali che

(1) $$\sup_{[a_n,b_n]} f = M \quad \left(= \sup_{[a,b]} f\right)$$

. (2) $\{a_n\}$ cresce, $\{b_n\}$ decresce, tutto vive in $[a,b]$

(3) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$

Come nel caso del Teorema degli zeri $a_n \to \lambda$, $b_n \to \mu$ (per monotonia), $\lambda = \mu$ (per la (3)) e quindi se chiamo $x_2 = \lambda = \mu$ ho trovato che

$$a_n \to x_2 \quad , \quad b_n \to x_2$$

RIMANE DA DIMOSTRARE CHE $f(x_2) = M$. Distinguo due casi:

<u>$M = +\infty$</u> So che $\forall n$ $\sup_{[a_n,b_n]} f = +\infty$. Allora posso trovare un punto x_n in $[a_n, b_n]$ tale che $f(x_n) > n$. Dunque ho costruito una (terza) successione x_n tale che

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x_2}}{a_n} \le x_n \le \underset{\substack{\downarrow \\ x_2}}{b_n}, \qquad f(x_n) \geq n \qquad \Rightarrow x_n \to x_2$$
$$\Rightarrow f(x_n) \to +\infty$$

· Dato che f è continua e che $x_n \to x_2 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_2) \in \mathbb{R}$

Ma $f(x_n) \geq n \Rightarrow f(x_n) \to +\infty$ $\leftarrow$ CONTRADDIZIONE

NON È POSSIBILE CHE $M = +\infty$

$M \in \mathbb{R}$ Dato che $\sup\limits_{[a_n, b_n]} f = M \in \mathbb{R}$ posso trovare x_n

in $[a_n, b_n]$ tale che $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$. Quindi

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \qquad M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

Ne segue $x_n \to x_2$, $f(x_n) \to M$ (carabinieri)

Ma io so che f è continua e che $x_n \to x_2$, ne ricavo che

$f(x_n) \to f(x_2)$. Dunque la succ. $f(x_n)$ tende

$\nearrow$ a M (per un motivo)

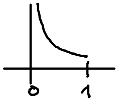
$\searrow$ a $f(x_2)$ (per un altro motivo)

$\Longrightarrow$ (unicità del limite) $f(x_2) = M$

ciò che volevo

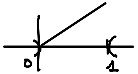
· Commenti: Se si rimuove qualcuna delle ipotesi il teorema non vale. Per esempio

· Se l'intervallo non è chiuso: $f(x) = \frac{1}{x}$



è continua su $]0,1[$, ma non ha né max, né min su $]0,1[$ — $\sup_{]0,1[} \frac{1}{x} = +\infty$ (non può avere max). $\inf_{]0,1[} \frac{1}{x} = 1$, ma non c'è nessun x in $]0,1[$ in cui $\frac{1}{x} = 1$.

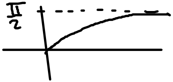
Analogamente $f(x) = x$ non ha max/min su $]0,1[$



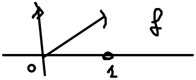
· Se l'intervallo non è limitato

$f(x) = x$ su $[0,+\infty[$ (non ha max – $\sup = +\infty$)

$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ su $[0,+\infty[$ (non ha max – $\sup = \frac{\pi}{2}$)



· Se f non è continua



NON HA MAX su $[0,1]$

Teorema di Weierstrass

Teorema

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ *e sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione* ***continua***. *Allora* f ***ammette massimo e minimo*** *in* $[a,b]$. *Ciò significa:*

$$\exists x_m, x_M \in [a,b] : \forall x \in [a,b] \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

Ricordiamo che x_m *è detto* ***punto*** *di minimo,* x_M *è detto* ***punto*** *di massimo, mentre il minimo e il massimo sono* $f(x_m)$ *e* $f(x_M)$.

DIM

Teorema dei valori intermedi

Teorema

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ *e sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione* ***continua***. *Allora* f *assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo. Se indichiamo con* $m = f(x_m)$ *il minimo e con* $M = f(x_m)$ *il massimo di* f *su* $[a,b]$, *quanto appena affermato corrisponde a dire*

$$\forall\lambda : m \leq \lambda \leq M \quad \exists x \in [a,b] : f(x) = \lambda$$

(se λ *è compreso tra il massimo e il minimo, allora è assunto in una opptuna* x *di* $[a,b]$*).*

DIM

· Esercizio

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(\underbrace{x - \ln\left(1+e^x+x^2\right)}\right)$$

(#26 – ris. sbagliato)

dentro il logaritmo il termine più importante (quello che va più velocemente all'infinito) è e^x – lo metto in evidenza:

$$e^x\left(x-\ln(1+e^x+x^2)\right) = e^x\left(x-\ln\left(e^x\left(e^{-x}+1+e^{-x}\underbrace{x^2}_{\text{secondo termine più importante}}\right)\right)\right)$$

$$= e^x\left(\cancel{x}-\cancel{\ln(e^x)}-\ln\left(1+\underbrace{x^2e^{-x}+e^{-x}}_{y\to 0}\right)\right) =$$

limite notevole

$$\left(\ln(1+y) = y + o(y) \text{ se } y\to 0\right)$$

NOTA CHE $x\to\infty$ MA $y = x^2e^{-x}+e^{-x}\to 0$

$$-e^x\left(x^2e^{-x}+e^{-x}+o\left(x^2e^{-x}+e^{-x}\right)\right) =$$

$$-x^2-1+o(x^2+1) \longrightarrow -\infty$$

$(\pm o(-)$ è lo stesso$)$