Analisi Matematica 1
Quattordicesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

20 novembre 2009

(*) $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2} = -\frac{1}{8}}$$

<u>Oss.</u> Abbiamo visto che (*) non si riesce a fare usando

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)} \iff \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}}_{(**)}$$

se tentiamo di usare $**$, arriviamo a $\frac{o(x)}{x^2}$, di cui <u>non posso dire nulla</u>. Dentro $o(x)$ ci potrebbe essere

- $x^{3/2}$ (che diviso per x^2 tenderebbe a ∞)
- $a x^2$ (che diviso per x^2 tenderebbe a a) e altro ancora...
- x^3 (che diviso per x^2 tenderebbe a zero) (TUTTO PER $x \to 0$)

Facendo il limite (*) abbiamo "scoperto" che l'o-piccolo di x di $**$ è in realtà $-\frac{x^2}{8} + o(x^2)$ INFATTI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2} = -\frac{1}{8} \iff$$

(sottintendo $x \to 0$)

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2} = -\frac{1}{8} + o(1) \iff$$

$$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} = -\frac{1}{8}x^2 + x^2 o(1) \iff$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underbrace{x^2 o(1)}_{= o(x^2 \cdot 1) = o(x^2)}$$

$\iff$

$$(*) \quad \boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$$

DICE DI PIÙ RISPETTO A $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$

ho "INGRANDITO" $o(x)$ trovando $-\frac{x^2}{8} + o(x^2)$

Se aggiungo $(*)$ ai miei limiti notevoli (sostituendolo a quello vecchio) sono in grado fare limiti più complessi

L'ultimo limite fatto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2} = -\frac{1}{8}$$

si può scrivere in termini di infinitesimi dicendo:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

Tale formula ci dà maggiori informazioni rispetto a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

In sostanza l'o piccolo della seconda formula, "guardato al microscopio" si rivela essere $-\frac{x^2}{8} + o(x^2)$.
Possiamo allora ricordarci la prima formula (più precisa) invece della seconda e questo ci permetterà di fare dei limiti più complessi, per esempio:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(2\sqrt{n^2-n+1} - 2\sqrt{n^2+4} + 1\right) \quad \leftarrow$$

$$n\left(2\sqrt{n^2-n+1}-2\sqrt{n^2+4}+1\right)=$$

$$n\left(2n\left[\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right]+1\right)=$$

$$2n^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\frac{1}{2n}\right)=\star\ \left(\text{forma } \infty\cdot 0\right)$$

PROVIAMO A FARLO CON LA "VECCHIA" INFORMAZIONE

$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+o(x)$, per $x\to 0$. (Uso $x=-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$ / $\frac{4}{n^2}$)

$$\star=2n^2\left[\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+o\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\cancel{1}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n^2}\right)+o\left(\frac{4}{n^2}\right)+\frac{1}{2n}\right]$$

$\frac{1}{n^2}=o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$=2n^2\left[-\cancel{\frac{1}{2n}}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\cancel{\frac{1}{2n}}\right]=$$

$$=2n^2\left[-\frac{3}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=2n^2\left[o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

MANCA IL TERMINE $\frac{1}{n}$

NON MI SERVE A NIENTE DATO CHE C'È $o\left(\frac{1}{n}\right)$ * qui dentro ci possono essere dei termini dell'ordine di $\frac{1}{n^2}$

- Mi trovo $2n^2\, o\left(\frac{1}{n}\right)$ che non so a cosa tende

Torniamo indietro e usiamo l'informazione PIÙ FORTE

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2) \quad (*)$$

$$2n^2\left[\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\frac{1}{2n}\right]=$$

$$x=-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \qquad\qquad x=\frac{4}{n^2}$$

USO $(*)$ SOLO NELLA PRIMA RADICE - NELLA SECONDA NON SERVE (MA NON SAREBBE SBAGLIATO)

$$2n^2\left[\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+o\left(\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\right)+\right.$$

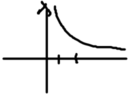
$$\left.-\cancel{1}-\frac{1}{2}\,\frac{4}{n^2}-o\left(\frac{4}{n^2}\right)+\frac{1}{2n}\right]=$$

QUI VIENE $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ SENZA USARE $(*)$

$$2n^2\left[-\cancel{\frac{1}{2n}}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\cancel{\frac{1}{2n}}\right]=$$

$$2n^2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-2\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\left[\frac{4-1-16}{8}\,\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]2n^2\to\boxed{-\frac{13}{4}}$$

Continuità



Definizione

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$.
Diremo che f è continua in x_0 se:

- x_0 è isolato in A; (senza altre condizioni !!!)
- x_0 è di accumulazione per A e

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Quindi se non ci sono altri punti in A vicino a x_0 ogni f è automaticamente continua in x_0 – per esempio le successioni sono continue in ogni punto di $\mathbb{N}$. Questa convenzione per la verità non ha grossi impatti nella pratica.

Definizione

Diremo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in A se f è continua in x_0 per ogni x_0 di A.

Per esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ È DEFINITA PER $X \neq 0$

$A = \{x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Se prendo un qualunque $x_0 \neq 0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$ (perché $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ e poi applico il teorema sul reciproco del limite, $x_0 \neq 0$)

cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, DUNQUE f È CONTINUA IN x_0

$\Rightarrow$ f è continua sul suo dominio

NON HA SENSO PORSI IL PROBLEMA DELLA CONTINUITÀ DI f in ZERO perché $0 \notin A$.

NOTA tutti i numeri $x_0 \neq 0$ sono di accumulazione per A

Osservazione (utile) $f: A \setminus \{x_0\}$, x_0 di accumulazione per A

(per esempio $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ — è definito per $x \neq 0$)

Allora sono fatti EQUIVALENTI

(1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

(2) $\exists \ \ell \in \mathbb{R}$ tale che, definita $f^*: A \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \setminus \{x_0\} \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases},$$

f^* risulta continua in x_0

IN SOSTANZA $\lim_{x \to x_0} f(x)$ è quell'unico valore (se esiste) tale che "rende continua" la funzione in x_0

(QUESTO SI PUÒ DIMOSTRARE FACILMENTE, ...)

Quindi, nel caso di $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, il valore $f(0)=1$ è "il valore giusto" da dare a f in zero.

CLASSIFICAZIONE DELLE "DISCONTINUITÀ"

Tradizionalmente si dice:

(a) se f ha limite ℓ finito in x_0, ma $f(x_0) \neq \ell$ (o $f(x_0)$ non esiste ..) $\Rightarrow$ f HA DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

(b) Se f ha limiti destro e sinistro in x_0 - ma sono diversi $\Rightarrow$ f HA UNA DISCONTINUITÀ DI SALTO

(per esempio se f è monotona $\Rightarrow$ o f È CONTINUA o f HA UN SALTO

(c) f HA DISCONTINUITÀ DI II° specie se x_0 è di accumulazione ma il limite o non esiste o è infinito

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
$f(0) = 0$
ha DISCONTINUITÀ DI II° specie

$\begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Osservazione

Se $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \notin A$, ma x_0 è di accumulazione per A, e $l \in \mathbb{R}$, allora sono equivalenti le due affermazioni

- la funzione $\tilde{f} : A \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0, \\ l & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$

  è continua in x_0
- $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

In altri termini il limite di f in x_0 è l'unico possibile valore con cui si può estendere f in x_0 in modo che risulti continua.

Teorema

- *(linearità)* *Se f e g sono continue in x_0, α e β sono numeri reali, allora*
$$\alpha f + \beta g \text{ è continua in } x_0.$$
- *Se f e g sono continue in x_0, allora fg è continua in x_0.*
- *f e g sono continue in x_0 e se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è continua in x_0.*
- *(continuità della composizione)*
Se g è continua in x_0 e f è continua in $g(x_0)$ allora $f \circ g$ è continua in x_0.

Definizione (Classificazione delle discontinuità)

Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ con x_0 di accumulazione per A. Supponiamo che f non sia continua in x_0. Distingueremo le seguenti situazioni.

- Esiste finito $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$.
  In questo caso si dice che f ha in x_0 una **discontinuità eliminabile**.
  In effetti se si considera la nuova funzione $\tilde{f}$ definita da
  $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0, \\ l & \text{se } x = x_0, \end{cases} \qquad \text{allora } \tilde{f} \text{ è continua in } x_0.$$
- Esistono finiti, ma diversi tra loro $l^+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $l^- = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (indicati spesso con $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$).
  In questo caso diciamo che f ha in x_0 una **discontinuità di salto** e chiamiamo **salto** di f in x_0 la differenza $l^+ - l^-$ $\quad (f(x_0^+) - f(x_0^-))$.
- Non vale nessuno dei due casi precedenti (perché il limiti sopra sono infiniti oppure non esistono).
  Diciamo allora che f ha in x_0 una **discontinuità essenziale**.

Teorema degli zeri

.

Teorema

*Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione **continua**. Se $f(a)$ e $f(b)$ sono diversi da zero e **discordi**, allora f **ha uno zero**:*

$$\exists x \in]a,b[: f(x) = 0$$

Notiamo che l'ipotesi sopra si può esprimere dicendo $f(a)f(b) < 0$.

DIM

Teorema di Weierstrass

Teorema

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione* ***continua****. Allora* f ***ammette massimo e minimo*** *in* $[a, b]$*. Ciò significa:*

$$\exists x_m, x_M \in [a, b] : \forall x \in [a, b] \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

Ricordiamo che x_m *è detto* ***punto*** *di minimo,* x_M *è detto* ***punto*** *di massimo, mentre il minimo e il massimo sono* $f(x_m)$ *e* $f(x_M)$*.*

DIM

Teorema dei valori intermedi

Teorema

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ *e sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione* ***continua****. Allora* f *assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo. Se indichiamo con* $m = f(x_m)$ *il minimo e con* $M = f(x_m)$ *il massimo di* f *su* $[a,b]$*, quanto appena affermato corrisponde a dire*

$$\forall \lambda : m \leq \lambda \leq M \quad \exists x \in [a,b] : f(x) = \lambda$$

(se λ *è compreso tra il massimo e il minimo, allora è assunto in una opptuna* x *di* $[a,b]$*).*

DIM

Teorema

Sia I un intervallo di estremi a e b (che possono essere finiti o infiniti e possono essere o non essere in I) e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora

- *Se f è continua allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo.*
- *Viceversa se $J = f(I)$ è un intervallo e se f è monotona, allora f è continua. Inoltre in questo caso gli estremi α e β di J sono dati da*

$$\alpha = \lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \beta = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

se f è crescente, mentre se f è decrescente

$$\beta = \lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \alpha = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Dunque una funzione monotona è continua se e solo se trasforma intervalli in intervalli.

DIM

Continuità dell'inversa su un intervallo

Teorema

Sia I un ***intervallo*** *(che può essere aperto / chiuso / semiaperto / limitato / illimitato).*
Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione ***continua****.*

Allora f è iniettiva se e solo se f è strettamente monotona.

DIM

Una immediata conseguenza dei due teoremi precedenti è

Teorema (Continuità dell'inversa su un intervallo)

Sia I un ***intervallo*** *e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione* ***continua e iniettiva*** *.*

Allora, posto $J = f(I)$ (che è un intervallo), esiste $f^{-1}: J \to I$ e f^{-1} ***è continua****.*

DIM

Da tutto quanto fatto finora le funzioni “elementari” sono tutte continue dove definite. Quindi sono continue:

- $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, se P e Q sono polinomi, nell'insieme $\{x : Q(x) \neq 0\}$;
- $f(x) = \sqrt[n]{(}x)$ in $\mathbb{R}$ se n è dispari e in $[0, +\infty[$ se n è pari;
- $f(x) = A^x$, dove $A > 0$, in $\mathbb{R}$;
- $f(x) = \log_A(x)$, dove $A > 0$ e $A \neq 1$, in $]0, +\infty[$;
- $f(x) = x^\alpha$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$, in $]0, +\infty[$;
- $f(x) = \sin(x)/\cos(x)$, in $\mathbb{R}$; $f(x) = \tan(x)$ in $\{x : \cos(x) \neq 0\}$;
- $f(x) = \arcsin(x)/\arccos(x)$ in $[-1, 1]$; $f(x) = \arctan(x)$ in $\mathbb{R}$;

e tutte le combinazioni ottenibili dalle funzioni sopra mediante somme prodotti quozienti o composizioni.

· $f(x) = x^{\alpha}$ DOVE È DEFINITA

– $x > 0$ (SICURAMENTE)

– Per $x < 0$ NON C'È ACCORDO ☹

Molti ritengono che $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1/3} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}} = -\sqrt[3]{3}$

Questa def. ha il difetto che DIPENDE DA COME RAPPRESENTO $-\frac{1}{3}$ $\left(= -\frac{2}{6}\right) \rightsquigarrow \left(-\frac{2}{6}\right)^{-2/6} = \sqrt[6]{\left(-\frac{6}{2}\right)^{2}} > 0$

PER ME $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$ $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ NON LO SCRIVO

$x^{\alpha} = e^{\alpha \ln(x)}$ (solo per $x > 0$) se $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{x^{\alpha} \text{ È DEF SOLO PER } x > 0}$

· Allora x^x è definito solo per $x > 0$

DOMANDA posso definirlo in $x=0$, in modo che sia continuo

RISPOSTA Fa il $\lim_{x\to 0^+} x^x$ — se esiste finito quello è il valore da mettere in $x=0$

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln(x)}$$

IN GENERALE CONVIENE SCRIVERE

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$$

e poi considerare l'esponente $g(x)\ln(f(x))$

COSÌ TRASFORMO "FORME ESPONENZIALI" IN PRODOTTI

PASSO A

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

(limite notevole "il logaritmo perde sempre" — se $x\to 0^+$ o $x\to +\infty$)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$$

(se metto $f(0) = 1$ f risulta continua)

- $\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ TRASFORMO IN PRODOTTO :

$\cos(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\cos(x))}$ e considero l'esponente

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x} = 0$ usiamo gli o-piccoli

<u>So</u> che $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow$

$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \otimes$

<u>SO ANCHE</u> $\ln(1+y) = y + o(y)$ (metto $y = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$)

$\otimes = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

ALLORA

$\frac{\ln(\cos(x))}{x} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = -\frac{x}{2} + o(x) \longrightarrow 0$