Analisi Matematica 1
Tredicesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

19 novembre 2009

Teorema (di composizione o di cambio di variabile)

Siano $f : A \to B$ *e* $g : B \to \mathbb{R}$ *dove* A *e* B *sono sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$*, siano* x_0 *un punto di accumulazione per* A *e* y_0 *un punto di accumulazione per* B*.*
Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \qquad \lim_{y \to y_0} g(y) = l$$

dove $l \in \overline{\mathbb{R}}$*. Supponiamo ancora che valga UNA TRA LE DUE ipotesi*

- $g(x) \neq y_0$ *per* x *vicino a* x_0
- $y_0 \in B$ *e* $g(y_0) = l$

ALLORA

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$$

· Abbiamo def. (LIMITE DI FUNZIONI – def. "per successioni")

- pto di accumulazione x_0 di acc. per A se esiste $\{a_n\}$ in A tale che $a_n \neq x_0$, $a_n \to x_0$

- limite $f : A \to \mathbb{R}$, per $x \to x_0$

$f(x) \to \ell$ se per ogni $\{a_n\}$ in A, con $a_n \neq x_0$ e $a_n \to x_0$ succede che $f(a_n) \to \ell$

(Esiste anche una def. diretta, che si rivela equivalente).

$\Rightarrow$ TEOREMI VARI, analoghi a quelli visti per le successioni

- teoremi che collegano il limite e la relazione d'ordine "$\geq$" (permanenza del segno, monotonia del limite, confronti)

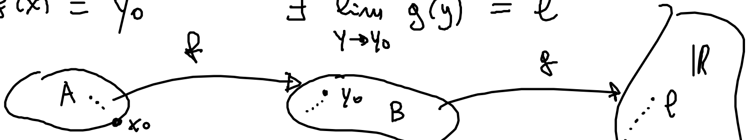
- teoremi che collegano il limite e le operazioni (somme / prodotti / quozienti – casi finiti o infiniti)

TEOREMA (di composizione) Supponiamo di avere:

$f : A \to B$ $\qquad g : B \to \mathbb{R}$ $\qquad$, $A, B \subset \mathbb{R}$

· x_0 di accumulazione per A ; y_0 di accumulazione per B

· $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ $\qquad$ $\exists \lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$



VORREI CHE $\boxed{\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell}$

QUESTO È VERO A PATTO CHE VALGA UNA DELLE DUE IPOTESI:

(a) $f(x) \neq y_0$ per le x vicine a x_0, $x \neq x_0$

(b) $y_0 \in B$ $\quad g(y_0) = \ell$

(NOTIAMO CHE se $y_0 \notin B$ la (a) è automaticamente verificata)

DIM. Dobbiamo dimostrare che presa una qualunque succ. $\{a_n\}$ in $A \setminus \{x_0\}$ e che tende a x_0, si ha $g(f(a_n)) \to \ell$

- Prendiamo una tale $\{a_n\}$. Dato che $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \implies$ $f(a_n) \to y_0$. Mettiamo che valga (a), allora $f(a_n) \neq y_0 \ \forall n$; allora per def di $\lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$ so che $g(f(a_n)) \to \ell$. Dunque vale la tesi (se vale (a))

Mettiamo che invece valga la (b). In questo caso so che $f(a_n) \to y_0$, ma non so che $f(a_n) \neq y_0$

Devo dividere gli a_n in due sottosuccessioni:

a'_n tali che $f(a'_n) \neq y_0$

a''_n tali che $f(a''_n) = y_0$

(le due sottosuccessioni $\{a'_n\}$ e $\{a''_n\}$ esauriscono tutta la $\{a_n\}$)

$a'_n \to x_0$, $a''_n \to x_0$ (estratte da $\{a_n\}$)

$\implies f(a'_n) \to y_0$ $(\neq y_0)$, $f(a''_n) = y_0 \to y_0$

$g(f(a'_n)) \longrightarrow \ell$ per def del $\lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$

$\cdot \quad g(f(a''_n)) = g(y_0) = \ell \qquad (\text{per } \ell_0\,(b))$

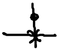
$\Rightarrow \quad g(f(a''_n)) \longrightarrow \ell$

Ne segue che $g(f(a_n)) \to \ell$ cioè la tesi #

<u>IN GENERALE</u> (se mancano sia ℓ_0 (a) che ℓ_0 (b)) il risultato non vale. Il motivo è che nella def. di limite <u>NON</u> si tiene conto del valore della funzione nel punto.

<u>Per esempio</u>

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \ (= \ell)$$

il valore $g(0)=1$ non conta ai fini del limite

$(\text{se } a_n \neq 0,\ a_n \to 0 \Rightarrow g(a_n) = 0 \to 0)$

$$f(x) = 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ (= x_0)}} f(x) = 0 \ (= y_0)$$

$$\text{MA} \quad \lim_{x \to 0} g(f(x)) = \lim_{x \to 0} 1 = 1 \neq 0$$

· Il teorema precedente (di composizione) si può vedere come un "cambio di variabile". Per esempio

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$$

IDEA: $y = x - 1$

Noto che se $x \to 1$ $y \to 0$

Allora il limite si trasforma in

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

Formalmente

$g(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$ $\qquad y_0 = 0$

$\qquad x_0 = 1$

$f(x) = x - 1$. Noto che

g è definita per $y \neq 0$ e $f(x) \neq 0$ se $x \neq 1$ $\Rightarrow$

ipotesi (a)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} g(f(x)) \underset{\text{(TEOREMA)}}{=} \lim_{y \to 0} g(y) = 1$$

(LIMITE NOTEVOLE)

OSS. L'equivalente nelle successioni è il teorema (molto più banale)

$a_n \to \ell$, $\sigma_n \to +\infty$ $\Rightarrow$ $a_{\sigma_n} \to \ell$

· ## Limite di funzioni monotone

$f : I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo di estremi a, b (finiti o infiniti, appartenenti o non appartenenti a I)

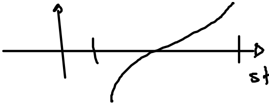
- f crescente su I se

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- f crescente in senso stretto su I se

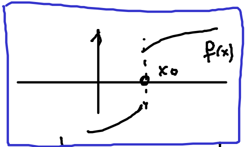
$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- f decrescente / decr. in senso stretto — STESSA DEF. SOSTITUENDO $f(x) \geq f(y)$ / $f(x) > f(y)$



UNA FUNZIONE CHE VERIFICHI UNA DELLE PROPRIETÀ SOPRA SI DICE MONOTONA. Abbiamo visto che le succ.

monotone hanno limite. Il caso delle funzioni è un po' più complesso.



f crescente
ma $\nexists$ limite
però $\exists$ lim dx e lim sx

Teorema Sia f monotona crescente su I. $x_0 \in [a, b[$ (x_0 di acc. da destra)

$$\Rightarrow \text{ esiste } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) .$$

Analogamente se $x_0 \in]a, b]$ (di acc. da sinistra)

$$\Rightarrow \text{ esiste } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x)$$

In particolare, se $a < x < b$, esistono entrambi e

$$-\infty < \sup_{x<x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) < +\infty$$

· (se f è crescente può avere solo uno "discontinuità di salto")

Stesso risultato se f è decrescente — scambiare inf e sup. !!

ANCHE NEL CASO DEI LIMITI DI FUNZIONI il teorema sopra è importante perché garantisce l'esistenza del limite SENZA DIRE esplicitamente quanto fa il limite.

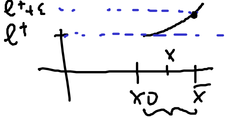
Dim (parte del limite destro – f crescente).

Chiamo $\ell^+ = \inf \{ f(x) : x > x_0 \}$

(ℓ^+ esiste – può essere $-\infty$ se $x_0 = a$ – faccio la dim. solo nel caso $\ell^+ \in \mathbb{R}$). Per def. di estremo inferiore

– $f(x) \geq \ell^+ \quad \forall x > x_0$

– $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} > x_0$ tale che $f(\bar{x}) < \ell^+ + \varepsilon$



Dato che f è crescente $\Rightarrow$ $\forall x \in \left]x_0, \bar{x}\right]$
$\ell^+ \leq f(x) \leq f(\bar{x}) < \ell + \varepsilon$

Allora prendiamo $\{x_n\}$ una successione in I con $x_n > x_0$ e con $x_n \to x_0$. Prendiamo $\varepsilon > 0$ e di conseguenza scegliamo $\bar{x}$ come sopra. Dato che $x_n \to x_0$ definitivamente $x_n < \bar{x}$ e quindi

$$\text{definitivamente} \quad \ell^+ \leq f(x_n) \leq f(\bar{x}) < \ell^+ + \varepsilon$$

Dato che questo si può fare per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell^+$. Dato che $\{x_n\}$ è arbitraria abbiamo dimostrato

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+ \qquad \#$$

Osservazione

Il teorema di composizione nei limiti può essere interpretato come un teorema di "cambio di variabile" nei limite. Per esempio dimostriamo che

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

Se chiamiamo $g(x) = x - 1$ il limite sopra si presenta come

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+f(x))}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

dove nella prima eguaglianza si sfrutta il teorema di composizione – notiamo che $f(x) \xrightarrow{x\to 1} 0$ (quindi il limite per $x \to 1$ si è trasformato in un limite per $y \to 0$) e che $f(x) \neq 0$ per $x \neq 1$ (e quindi risulta verificata l'ipotesi del teorema suddetto).

Formalmente si può dire: "pongo $y = x - 1$", noto che per $x \to 1$ si ha $y \to 0$ e $y \neq 0$; allora posso sostituire $x - 1$ con y e fare il limite per $y \to 0$

Teorema (limiti destro e sinistro per funzioni monotone)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione crescente (decrescente) dove I è un intervallo di estremi $a < b$ (anche infiniti). Allora per ogni x_0 con $a \leq x_0 < b$ esiste

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) \quad \left(= \sup_{x > x_0} f(x) \right).$$

Analogamente per ogni x_0 con $a < x_0 \leq b$ esiste

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \quad \left(= \inf_{x < x_0} f(x) \right).$$

Di conseguenza, se $a < x_0 < b$ e se f è crescente

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

mentre se f è decrescente

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \geq f(x_0) \geq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Limiti notevoli

$a \neq 0$
$b \neq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^k + \text{potenze di grado minore di } k}{bx^h + \text{potenze di grado minore di } h} = \begin{cases} 0 & \text{se } k < h \\ \frac{a}{b} & \text{se } k = h \\ \frac{a}{b} \cdot +\infty & \text{se } k > h \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax^k + \text{potenze di grado minore di } k}{bx^h + \text{potenze di grado minore di } h} = \begin{cases} 0 & \text{se } k < h \\ \frac{a}{b} & \text{se } k = h \\ \underline{(-1)^{k-h}}\frac{a}{b} \cdot +\infty & \text{se } k > h \end{cases}$$

(posso buttare via i termini di grado $<k$ / $<h$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{A^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \text{se } A > 1 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha A^x = 0 \qquad \text{se } 0 < A < 1 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

(A^x VINCE)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\varepsilon} = 0 \qquad \text{se } \varepsilon > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \ln(x) = 0 \qquad \text{se } \varepsilon > 0$$

$\lim_{x\to-\infty} A^x|x|^\alpha = 0$ se $A>1$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{A^x}{|x|^\alpha} = +\infty$ se $0<A<1$

basta fare un cambio di variabile $y = -x$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha \qquad \text{se } \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

traduzione come limiti di funzioni di quanto visto per le successioni

($\forall\, a_n \to +\infty \quad (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e$ DIVENTA $\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, e così via...)

Ordine di infinitesimo per funzioni

Definizione

f e g definite vicino a x_0 in $\overline{\mathbb{R}}$. Diremo che f e g sono a **asintotiche** in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Diremo che che f è un **o piccolo di** g in x_0 e scrivendo $f(x) = o(g(x))$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Diremo anche che f è un **o grande** di g e scrivendo $f(x) = O(g(x))$ se

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ è limitata vicino a } x_0.$$

ATTENZIONE - in queste definizioni il punto x_0 CONTA. Spesso però, quando x_0 è chiaro dal contesto x_0 viene sottinteso (tipicamente $x_0 = 0$)

Teorema (Proprietà de gli o piccoli/ o grandi per funzioni)

Siano f e g due funzioni definite vicino a un punto x_0.

1. $f \simeq g \Leftrightarrow f = g(1+o(1)) \Leftrightarrow f = g + o(g) \Rightarrow f = O(g)$ $\quad g + o(g) = O(g)$;
2. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$ $\quad o(g) = O(g)$;
3. $Se\ f_1 = O(g), f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = O(g)$ $\quad O(g) + O(g) = O(g)$;
4. $Se\ f_1 = o(g), f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = O(g)$ $\quad o(g) + O(g) = O(g)$;
5. $Se\ f_1 = o(g), f_2 = o(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)$ $\quad o(g) + o(g) = o(g)$;
6. $Se\ f_1 = O(g_1), f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$ $\quad O(g_1)O(g_2) = O(g_1 g_2)$;
7. $Se\ f_1 = o(g_1), f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ $\quad o(g_1)O(g_2) = o(g_1 g_2)$;
8. $Se\ f_1 = o(g_1), f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ $\quad o(g_1)o(g_2) = o(g_1 g_2)$;
9. $Se\ f = O(g), h = O(f) \Rightarrow h = O(g)$ $\quad O(O(g)) = O(g)$;
10. $Se\ f = o(g), h = O(f) \Rightarrow h = o(g)$ $\quad O(o(g)) = o(g)$;
11. $Se\ f = O(g), h = o(f) \Rightarrow h = o(g)$ $\quad o(O(g)) = o(g)$;
12. $Se\ f = o(g), h = o(f) \Rightarrow h = o(g)$ $\quad o(o(g)) = o(g)$.

Limiti notevoli in termini di ordine di infinitesimo

SOTTINTESO PER $\boxed{x \to 0}$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

$$\sin(x) = x + o(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \to 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + o(1)$$

$$\Updownarrow$$

$$e^x - 1 = x(1 + o(1))$$

$$\Updownarrow$$

$$e^x = 1 + x + x\,o(1)$$

$$\Updownarrow$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

esercizi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - \cos(x)\right)}{x\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2}$$ (? ?)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x)} = \,?$$

forma indeterminata, sia il numeratore che il denominatore tendono a zero! Usiamo ciò che conosciamo: (per $x \to 0$)

$$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin(x) = x + o(x)$$

$o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)$

SOSTITUENDO TROVO:

$$\frac{\cancel{1} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \left(\cancel{1} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{x\,(x + o(x))} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \longrightarrow \boxed{1}$$

$x\,o(x) = o(x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(x)}{x\sin(x)} = 1$$

• Vediamo l'ultimo (per vedere i possibili errori DA EVITARE)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$$

Usiamo quello che conosciamo:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + o(x) \implies$$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{\frac{x}{2}} + o(x) - \cancel{1} - \cancel{\frac{x}{2}}}{x^2} = \frac{o(x)}{x^2}$$ NON POSSO DIRE NIENTE !!

Se avessi buttato via subito l'o-piccolo:

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} \text{ "}\underset{?}{=}\text{" } \frac{1 + \frac{x}{2} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{0}{x^0} \to 0$$

AVREI SBAGLIATO. SE AVESSI AVUTO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$$

(SO CHE $\frac{o(x)}{x} \to 0$ MA NON SO COSA FA $\frac{o(x)}{x^2}$)

· I limiti notevoli fatti fino ad ora NON SONO SUFFICIENTI per calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}$

però gli o-piccoli ci fanno capire che non abbiamo informazioni sufficienti.

FACCIAMO IL LIMITE "CON LE MANI" (razionalizzando)

$$\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{\left(\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1+x-\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cancel{1}+\cancel{x}-\cancel{1}-\cancel{x}-\frac{1}{4}x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}}$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{8} \iff \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{8}+o(1) \iff$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}\underbrace{-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}_{o(x) \text{ della formula di prima}}}$$

l'o-piccolo di x di prima è $-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$

$(1+x)^{1/2} = 1+\frac{x}{2}+o(x)$