Analisi Matematica 1
Dodicesima lezione

prof. Claudio Saccon

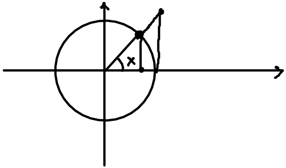
Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

13 novembre 2009

· Torniamo un momento sugli ultimi limiti (trigonometrici)

Avevamo visto

(mediante "interpretazione geometrica")



$\underline{\sin(x) \leq x \leq \operatorname{tg}(x)}$ se $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

da cui per simmetria $\operatorname{tg}(x) \leq x \leq \sin(x)$ se $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$

Da queste disuguaglianze si deduce

(1) se $a_n \to 0$ $\sin(a_n) \to 0$

DIM. dalle due dis. sopra

$$-|a_n| \leq \sin(a_n) \leq |a_n| \quad (\text{se } |a_n| < \pi/2)$$

$\Rightarrow$ TESI, usando il teorema del confronto

(2) se $a_n \to 0$ $\cos(a_n) \to 1$

DIM. $1-\cos(a_n) = \dfrac{1^2-\cos^2(a_n)}{1+\cos(a_n)} = \dfrac{\sin^2(a_n)}{1+\cos(a_n)}$

$\Rightarrow \quad |1-\cos(a_n)| = \dfrac{\sin^2(a_n)}{1+\cos(a_n)} \underset{\uparrow}{\leq} \sin^2(a_n)$

se $|a_n| \leq \frac{\pi}{2}$ ($\Rightarrow \cos(a_n) \geq 0$)

Per il punto (1), e per il t. del confronto,

$|1-\cos(a_n)| \to 0 \iff \cos(a_n) \to 1$

(3) se $a_n \to \ell \Rightarrow$

(a) $\sin(a_n) \to \sin(\ell)$, (b) $\cos(a_n) \to \cos(\ell)$

DIM. (a)

$\sin(a_n) = \sin(a_n - \ell + \ell) =$

$\underbrace{\sin(a_n-\ell)}_{\downarrow (1)\ 0} \cos(\ell) + \underbrace{\cos(a_n-\ell)}_{\downarrow (2)\ 1} \sin(\ell) \longrightarrow \sin(\ell)$

(b) $\cos(a_n) = \cos(a_n - \ell + \ell) =$

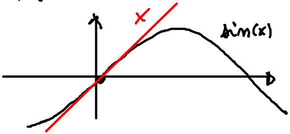
$$\underbrace{\cos(a_n-\ell)}_{\downarrow (2)\ 1}\cos(\ell) - \underbrace{\sin(a_n-\ell)}_{\downarrow (1)\ 0}\sin(\ell) \longrightarrow \cos(\ell)$$

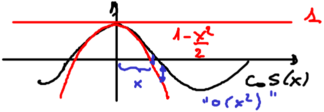
(4) LIMITI NOTEVOLI. Se $a_n \to 0$

$$\frac{\sin(a_n)}{a_n} \to 1 \quad ; \quad \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} \to \frac{1}{2}$$

(VISTI IERI). Questi limiti si possono dire:

$$\sin(a_n) = a_n + o(a_n) \quad ; \quad \cos(a_n) = 1 - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)$$





· Esempio $\quad$ se $a_n \to 0$ e $|b_n| \to \infty$

$$(1+a_n)^{b_n} \to ? \qquad \text{se } a_n b_n \to \ell \Rightarrow \exists \text{ limite} = e^{\ell}$$

Posso fare così:

$$(1+a_n)^{b_n} = e^{\ln(1+a_n)^{b_n}} = e^{b_n \ln(1+a_n)}$$

CONSIDERIAMO SOLO L'ESPONENTE

$$b_n \ln(1+a_n) \overset{(*)}{=} b_n\left(a_n + o(a_n)\right) = b_n a_n + o(b_n a_n)$$

SE $a_n b_n \to \ell \Rightarrow b_n \ln(1+a_n) \to \ell \Rightarrow$

$$(1+a_n)^{b_n} \to e^{\ell}.$$

· ANCHE se $\ell = \pm\infty$ con la convenzione $e^{+\infty} = +\infty$, $e^{-\infty} = 0$

(*) limite notevole $\dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1 \iff \ln(1+a_n) = a_n(1+o(1)) \iff$ ☺

- Esempi:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \longrightarrow e^{\infty} = +\infty \qquad a_n=\frac{1}{n};\ b_n=n^2,\ a_nb_n\to+\infty$$

- $$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} \longrightarrow e^{0} = 1 \qquad a_n=\frac{1}{n^2},\ b_n=n,\ a_nb_n\to 0$$

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{n} = \Big(\overbrace{\frac{n+2}{n-3}-1}^{a_n}+1\Big)^{n} = \left(1+\frac{\cancel{n}+2-\cancel{n}+3}{n-3}\right)^{n} =$$

$$\left(1+\frac{5}{n-3}\right)^{n} \longrightarrow e^{5} \quad \text{perché } \frac{5}{n-3}\cdot n \to 5$$

- $$\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-4}\right)^{n} = \left(1+\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-4}-1\right)^{n} =$$

$$\left(1+\frac{-3n+7}{n^2+2n-4}\right)^{n} \longrightarrow e^{-3} \Leftarrow \frac{-3n+7}{n^2+2n-4}\cdot n \to -3$$

Punti di accumulazione

Definizione

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si dice che x_0 è di **accumulazione** per A se esiste una successione $\{a_n\}$ di punti di A, diversi da x_0, che tende ad x_0:

$$a_n \in A, \quad a_n \neq x_0, \quad a_n \to x_0.$$

Notiamo che si può anche dire

"esiste una successione in $A \setminus \{x_0\}$ che tende a x_0".

Nota

Ovviamente se $x_0 = \pm\infty$ la condizione $a_n \neq x_0$ è automaticamente verificata.

Definizione

Se $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e x_0 non è di accumulazione per A si dice che x_0 è un **punto isolato** in A

x_0 DI ACC. PER A se esiste $\{a_n\}$ tale che

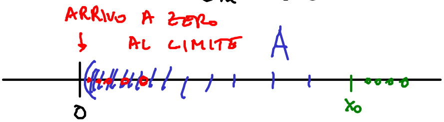
$a_n \in A \ \forall n$, $\quad a_n \neq x_0 \ \forall n$, $\quad a_n \to x_0$

<u>Esempio</u> $\quad A = \,]0, +\infty[$, chi sono i punti di accumulazione di A?

- $x_0 = 0$ è di acc. per A. Infatti posso prendere

  $a_n = \frac{1}{n}$. $\quad a_n > 0$ $(\Rightarrow a_n \in A)$. $\quad a_n > 0$ $(\Rightarrow a_n \neq 0)$

  $a_n \to 0$



(0 ∉ A, 0 È DI ACC. PER A)

- $x_0 > 0$ è di acc. per A. Si può prendere $a_n = x_0 + \frac{1}{n}$

  DI NUOVO $\quad a_n \in A$, $a_n \neq x_0$, $\quad a_n \to x_0$

  (Tutti i punti di A sono di accumulazione per A — A non contiene punti isolati)

- $+\infty$ è di acc. per A: $\quad a_n = n$, $a_n \in A$, $a_n \to +\infty$

- Se $x_0 < 0$, <u>x_0 NON È DI ACC.</u> PER A — dunque i pti di acc. per A sono esattamente dati da $[a, +\infty]$.

Infatti se $x_0 < 0$ e se $a_n \to x_0$ $\Rightarrow$ per la permanenza del segno deve essere $a_n < 0$ definitivamente $\Rightarrow$ definitivamente $a_n \notin A$.

<u>FATTO GENERALE</u> Se A = INTERVALLO DI ESTREMI $a \leq b$ $\Rightarrow$ i punti di acc. per A sono dati da $[a, b]$ (ammettendo anche i casi infiniti)

<u>ESEMPIO</u> $A = \mathbb{N}$. L'unico punto di acc. è $+\infty$.

(a) $+\infty$ è di acc. Basta prendere $a_n = n$, $a_n \to +\infty$

(b) non ce ne sono altri. Supponiamo che $\{a_n\}$ sia una successione di interi e supponiamo che $a_n \to x_0 \in \mathbb{R}$

SE NE DEDUCE (a) $x_0 \in \mathbb{N}$

(b) definitivamente $a_n = x_0$

(non lo dimostro rigorosamente — si ricava dal fatto che tra n e $n+1$ non ci sono interi). $\Rightarrow$ x_0 NON È DI ACC. perché (b) contraddice l'ipotesi $a_n \neq x_0$

DUNQUE $\mathbb{N}$ è fatto tutto di punti isolati

Questo giustifica il fatto che di una successione possiamo fare il limite <u>SOLO</u> per $n \to +\infty$, dato che $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$.

Esempio

0 è punto di accumulazione per $]0,1]$. Infatti la successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ è tutta contenuta in $]0,1]$ (quindi non vale mai zero) e tende a zero.

Esempio

Sia $A = [0,1] \cup \{2\}$. 2 è isolato in A – *vicino* a 2 non ci sono altri punti di A.

Esempio

$+\infty$ e $-\infty$ sono di accumulazione per $\mathbb{R}$. Per vederlo basta considerare le successioni definite da $a_n = n$ e $a'_n = -n$.

Proprietà

In generale I è un intervallo di estremi $\alpha < \beta$ (che possono appartenere oppure no all'intervallo), allora i punti di accumulazione per A sono tutti e soli i punti di $[\alpha, \beta]$. Con la convenzione sugli infiniti questo risultato vale anche con α o β infiniti (quindi nel caso di intervalli illimitati).

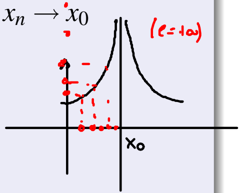
Definizione di limite tramite le successioni

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che l è il limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 se

per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di $A \setminus \{0\}$ con $x_n \to x_0$

si ha $f(x_n) \to l$.



Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = l \qquad \text{o anche } f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$$

Spesso, quando il punto x_0 è chiaro dal contesto, scriveremo semplicemente $f(x) \to l$.

Nota

Il fatto che x_0 sia di accumulazione per A assicura che esista qualche successione $\{x_n\}$ di punti di $A \setminus \{0\}$ con $x_n \to x_0$.

Esempi

- $\lim_{x \to x_0} x = x_0$
- $\lim_{x \to x_0} x^k = x_0^k$ (se $a_n \to x_0 \Rightarrow a_n^k \to \ell^k$ per i teoremi sulle successioni)
- $\lim_{x \to x_0} A^x = A^{x_0}$
- $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\left(\text{se } a_n \to 0,\ a_n \neq 0 \quad (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e \right)$

  $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ infatti se $a_n \to +\infty$ $\sin(a_n)$ limitato

  $\frac{1}{a_n} \to 0 \Rightarrow \frac{\sin(a_n)}{a_n} \to 0$

  $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ infatti se $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$ SO CHE $\frac{\sin(a_n)}{a_n} \to 1$

(ATTENZIONE A x_0 !!)

Definizione di limite per eccesso e per difetto

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che $f(x)$ tende a l per eccesso (per difetto) per x tendente a x_0 se

per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di $A \setminus \{0\}$ con $x_n \to x_0$
si ha $f(x_n) \to l^+$ (l^-).

$\left(\begin{array}{l} f(x_n) \to l \\ f(x_n) > l \text{ defin.} \end{array} \right)$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = l^+ \ (l^-) \qquad \text{o anche } f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l^+ \ (l^-)$$

Spesso, quando il punto x_0 è chiaro dal contesto, scriveremo semplicemente $f(x) \to l^+$ (l^-). (sottinteso il punto x_0)

Punti di accumulazione da destra e da sinistra

Definizione

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si dice che x_0 è di **accumulazione da destra (da sinistra)** per A se esiste una successione $\{a_n\}$ di punti di $A \setminus \{x_0\}$ che tende a x_0^+ (a x_0^-), cioè:

$$a_n \in A, \quad \underline{a_n > x_0}, \; (a_n < x_0) \quad a_n \to x_0.$$

Nota

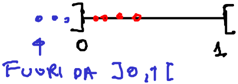
Se $+\infty$ è di accumulazione per A allora è di accumulazione da sinistra – analogamente se $-\infty$ è di accumulazione per A allora è di accumulazione da destra.

Osservazione

Un punto x_0 è di accumulazione per A se e solo se è di accumulazione da destra per A oppure è di accumulazione da sinistra per A (eventualmente entrambe le cose).

Esempio

Se $A =]0,1[$ allora l'insieme dei suoi punti di accumulazione da destra è costituito da $[0,1[$.
1 è di accumulazione ma non è di accumulazione da destra.
Analogamente l'insieme dei punti di accumulazione da sinistra è $]0,1]$.
0 è di accumulazione ma non è di accumulazione da sinistra.



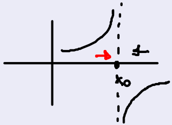
0 è di acc. da destra
NON DA sinistra

Limiti da destra e da sinistra

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione da destra (da sinistra) per A. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Diremo che l è il limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 da destra (da sinistra) se

per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di $A \setminus \{0\}$ con $x_n \to x_0^+$ (x_0^-)
si ha $f(x_n) \to l$.



Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_0^+ \ (x_0^-)} f(x) = l \qquad \text{o anche } f(x) \xrightarrow{x \to x_0^+ \ (x_0^-)} l$$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

Osservazione

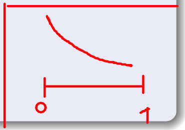
Si possono combinare le definizioni di limite per eccesso/difetto con quelle di limite da destra /da sinistra (nel modo ovvio) ottendo cose del tipo

$$\lim_{x \to x_0^+ \ (x_0^-)} f(x) = l^+ \ (l^-) \qquad \text{o anche } f(x) \xrightarrow{x \to x_0^+ \ (x_0^-)} l^+ \ (l^-)$$

Teorema

Se $f : A \to \mathbb{R}$ e se x_0 è punto di accumulazione sia da destra che da sinistra per A, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \text{ e } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$



L'esistenza del limite equivale all'esistenza del limite destro e di quello sinistro e alla lor eguaglianza.

Se invece x_0 è di accumulazione solo da destra limite = limite destro

Nel disegno è corretto scrivere $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

ATTENZIONE IL LIMITE DI f PER $x \to x_0$ NON DIPENDE DA $f(x_0)$ (AMMESSO CHE CI SIA) SCELTA DI LIMITE DELLA DEF

Definizione

Anche per i limiti di funzione diremo che f è **regolare** (in x_0) se esiste il limite di f per $x \to x_0$; che è **convergente** (in x_0) se f ammette limite finito e che è **divergente** (positivamente o negativamente) se f tende a pi'u o meno infinito.

Definizione

Sia x_0 un punto in $\overline{\mathbb{R}}$. Diremo che una proprietà $\mathscr{P}(x)$ è verificata **vicino** a x_0 se

caso $x_0 \in \mathbb{R}$ Esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}$ $\mathscr{P}(x)$;

caso $x_0 = \infty$ Esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x > M$ $\mathscr{P}(x)$; (ESCLUDO SEMPRE x_0)

caso $x_0 = -\infty$ Esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x < M$ $\mathscr{P}(x)$.

Nota che "vicino a $+\infty$" è sinonimo di "definitivamente".

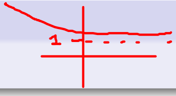
$f(x) = 1$ se $x \neq 0$,
$f(x) = -1$ se $x = 0$
$\Rightarrow$ $f(x) > 0$ VICINO A ZERO | $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ NONOSTANTE $f(0) = -1$

Teorema (unicità del limite)

Se per $x \to x_0$ *si ha* $f(x) \to l_1$ *e* $f(x) \to l_2$*, allora* $l_1 = l_2$.

Teorema (limite e limitatezza)

Se f *è convergente in* x_0*, allora* f *è limitata vicino a* x_0.



Teorema (Permanenza del segno)

Se $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$ *e* $l > 0$*, allora* $f(x) > 0$ *vicino a* x_0.

Teorema (monotonia del limite)

Se $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$ *e se* $f(x) \geq 0$ *vicino a* x_0*, allora* $l \geq 0$.

Teorema (del confronto o dei due carabinieri)

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *vicino a* x_0 *e se* $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$, $h(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$*, allora* $g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$*. Se* $l = +\infty$ $(-\infty)$ *non serve* h *(non serve* f*).*

Teorema

Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$,
x_0 *un punto di accumulazione per* A *(in* $\overline{\mathbb{R}}$ *)*,
$l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Supponiamo che $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_1$ *e che* $g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_2$. *Allora*

- $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_1 + l_2$, *purché* $l_1 + l_2$ *abbia senso.*
- $f(x)g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_1 \cdot l_2$, *purché* $l_1 \cdot l_2$ *abbia senso.*
- $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_1/l_2$, *purché* l_1/l_2 *abbia senso.*
- *Se* $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$ *e* g *è limitata vicino a* x_0 *allora* $f(x)g(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$.

(sono escluse le "forme indet." $+\infty - \infty$, $0 \cdot \pm\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)

Esempio di dim. Caso della somma. Se $f(x) \to l_1$, $g(x) \to l_2 \Rightarrow (f+g)(x) \to l_1 + l_2$

DEVO DUNQUE VERIFICARE CHE: $\forall a_n \to x_0$, $a_n \neq x_0$ $f(a_n) + g(a_n) \to l_1 + l_2$.
MA lo so che $f(a_n) \to l_1$, $g(a_n) \to l_2$ e allora per le prop delle succ.
$f(a_n) + g(a_n) \to l_1 + l_2$ Q.E.D. (abbiamo finito)