Analisi Matematica 1
Undicesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

12 novembre 2009

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n + \ln(1+n^2)}{n+1}}_{a_n}$$

IDEA: $a_n \sim \dfrac{2\ln(n)}{n} \to 0$

PROCEDIMENTO RIGOROSO:

$$\frac{(-1)^n + \ln(1+n^2)}{n+1} =$$

$$\frac{1}{n}\,\frac{(-1)^n + \ln\left(n^2(1+o(1))\right)}{1+o(1)} =$$

$$\frac{1}{n}\,\frac{\underset{O(1)}{(-1)^n} + 2\ln(n) + \underbrace{\ln(1+o(1))}_{o(1)}}{1+o(1)} =$$

$$\frac{2\ln(n)}{n}\cdot\frac{\frac{O(1)}{2\ln(n)} + 1 + \frac{o(1)}{2\ln(n)}}{1+o(1)} =$$

LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^k(n)}{n} = 0$$

qualunque $k \geq 0$

$\Updownarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^k(n)}{n^\varepsilon} = 0$$

qualunque $k \geq 0$ (grande)

qualunque $\varepsilon > 0$ (piccolo)

il logaritmo PERDE SEMPRE di fronte a una potenza

$$\cdot \quad \frac{2\ln(n)}{n} \cdot \frac{o(1)+1+o(1)}{1+o(1)} = \frac{2\ln(n)}{n}\Big(1+o(1)\Big) \to 0$$

questo tende a zero per il limite notevole.

$\cdot \quad O(a_n) =$ una successione b_n tale che $\frac{b_n}{a_n}$ è limitata

$(-1)^n = O(1) \iff \frac{(-1)^n}{1}$ è limitata VERO

IN SOSTANZA:

$o(1) =$ "infinitesimo" ; $O(1) =$ "limitata"

ES. 36

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - \ln^5(1+n)$$

· IDEA $\quad \ln^5(1+n) \sim \ln^5(n)$

In effetti $\ln^5(1+n) = \ln^5\big(n(1+o(1))\big) =$

$$\left[\ln(n) + \ln(1+o(1))\right]^5 = \left[\ln(n) + o(1)\right]^5 =$$

$$\ln^5(n)\Big[1 + \underbrace{\frac{o(1)}{\ln(n)}}_{=o(1)}\Big]^5 = \ln^5(n)\big(1+o(1)\big)$$

A questo punto

$$\sqrt{n} - \ln^5(1+n) = \sqrt{n} - \ln^5(n)\,(1+o(1)) =$$

$$\sqrt{n}\left\{1 - \frac{\ln^5(n)}{\sqrt{n}}(1+o(1))\right\} = \sqrt{n}\,\big(1+o(1)\big) \to +\infty$$

SO CHE TENDE A ZERO

$K=5,\ \varepsilon = 1/2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^4(1+n^2)+1}{\ln^2(1+n^4)+1} = \;??$$

IDEA $\quad \ln(P(n)) \simeq k \ln(n)$ se P è un polinomio di grado k

in fatti $\quad \ln\left(a_k n^k (1+o(1))\right) =$

$$\ln(a_k) + k\ln(n) + \ln(1+o(1)) =$$

$$k\ln(n)\left\{\frac{\ln(a_k)}{k\ln(n)} + 1 + \frac{\ln(1+o(1))}{k\ln(n)}\right\} =$$

$$k\ln(n)(1+o(1))$$

DUNQUE NELL' ESERCIZIO SOPRA

$$\frac{\ln^4(1+n^2)+1}{\ln^2(1+n^4)+1} = \frac{\left(2\ln(n)(1+o(1))\right)^4+1}{\left(4\ln(n)(1+o(1))\right)^2+1} =$$

$$\frac{16\ln^4(n)\left[(1+o(1))^4 + 1/16\ln^4(n)\right]}{16\ln^2(n)\left[(1+o(1))^2+1/16\ln^2(n)\right]} = \ln^2(n)\frac{(1+o(1))}{(1+o(1))} \to +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+e^n)}{n+1} = 1 \quad (?)$$

(n è trascurabile rispetto a e^n, se lo butto via trovo $\ln(e^n) = n$ ...

DA NON FARE COSÌ

FATTO CORRETTAMENTE

so che $\frac{n}{e^n} = o(1)$

$$\frac{\ln(\cancel{n}+e^n)}{n+1} = \frac{\ln\left(e^n\left(\frac{n}{e^n}+1\right)\right)}{n\,(1+1/n)} =$$

$$\frac{\overbrace{\ln(e^n)}^{=n} + \ln\left(1+\frac{n}{e^n}\right)}{n\,(1+o(1))} = \frac{n+\ln(1+o(1))}{n\,(1+o(1))} =$$

$$\frac{1+\overbrace{\frac{\ln(1+o(1))}{n}}^{=o(1)}}{1+o(1)} \to 1$$

(se avessi buttato via n subito il limite sarebbe stato giusto)

- in questo caso è giusto $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+e^n)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(e^n)}{n}$

ma non è detto che vada sempre bene

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n+e^n) - n$$

IDEA (COME PRIMA) e^n VINCE SU n $\rightsquigarrow$ $\ln(n+e^n) = n(1+o(1))$

PERÒ SE SCRIVO SOLO QUESTO NON RIESCO A CONCLUDERE

$$\ln(n+e^n) - n = n(1+o(1)) - n = \underbrace{n\, o(1)}_{\text{FORMA INDETERMINATA}} \longrightarrow ??$$

IN REALTÀ SO DI PIÙ

$$\ln(n+e^n) = \ln\left(e^n\left(1+ne^{-n}\right)\right) = \ln(e^n) + \ln(1+ne^{-n}) =$$

$$n + \ln(1+\underbrace{ne^{-n}}_{\text{è infinitesimo}}) = n + ne^{-n} + o(ne^{-n})$$

$$\left(\text{OPPURE } \quad n + ne^{-n}(1+o(1))\right)$$

$$= n\Big(1 + \underbrace{e^{-n}(1+o(1))}_{\text{VECCHIO } o(1) \text{ di cui ORA CONOSCO MOLTO DI PIÙ}}\Big)$$

SE USIAMO QUESTA NUOVA INFORMAZIONE

$$\ln(n+e^n) - n = n\left(1+ e^{-n}(1+o(1))\right) - n =$$

$$\underbrace{n\, e^{-n}(1+o(1))}_{\text{PRIMA QUI C'ERA } o(1)} \longrightarrow 0$$

dato che e^{-n} VINCE SU n

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty\right.$$

e il reciproco $\to 0$

Anche stavolta, se avessi cancellato subito n, non avrei commesso errori

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n+e^n) - n = \lim_{n\to\infty} \ln(e^n) - n = 0$$

PERÒ, facciamo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^n\left(\ln(n+e^n) - n\right)$

· Usando l'informazione trovata sopra:

$$e^n\left(\ln(n+e^n)-n\right)=e^n\left(\cancel{n}+ne^{-n}(1+o(1))-\cancel{n}\right)=$$

$$e^n\cdot n\cdot e^{-n}(1+o(1))=n(1+o(1))\longrightarrow+\infty$$

Quindi:

$$+\infty=\lim_{n\to\infty}e^n\left(\ln(n+e^n)-n\right)\neq\lim_{n\to\infty}e^n\left(\ln(e^n)-n\right)=0$$

ESERCIZIO Verificare

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n}\left(\ln(n+e^n)-n\right)=1$$

(non serve altro che la formula trovata sopra)

ANALOGAMENTE

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^2}\left(\ln(n^2+e^n)-n\right)=?$$

ES. 27 (LISTA) $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - n \right)(n+1)$

USIAMO I LIMITI NOTEVOLI VISTI LA VOLTA SCORSA – COL LINGUAGGIO DEGLI o-piccoli.

$$\boxed{\text{SO CHE SE } a_n \to 0 \quad (1+a_n)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3} a_n + o(a_n)} \quad \leftarrow 1$$

$$\left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - n \right)(n+1) = \underbrace{n(n+1)}_{\text{INFINITO}} \underbrace{\Big[\Big(1 + \overbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}^{a_n} \Big)^{1/3} - 1 \Big]}_{\text{INFINITESIMO}} =$$

$$n(n+1) \left[\cancel{1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) + o\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) - \cancel{1} \right] =$$

$$n(n+1) \left[\frac{1}{3} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right) + o\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right] = n(n+1) \Big(\underbrace{\frac{1}{3} \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2} \Big)}_{\frac{1}{3n^2}(1+o(1))} \Big)$$

$$= \frac{\cancel{n}(n+1)}{3 \cancel{n}\, n} \left(1 + o(1) \right) \to \frac{1}{3}$$

- **ES. 28** Con gli stessi calcoli

$$(1+n^2)\left(\sqrt[3]{n^3+n+1}-n\right) = (1+n^2)\, n\left(\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$\frac{(1+n^2)}{3n}(1+o(1)) \to +\infty$$

- **ES 63** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}+1}{n+2}$

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ (uso Cesaro)

$a_n = n!$ $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{\cancel{n!}\cdot(n+1)}{\cancel{n!}} = n+1 \to +\infty$

DUNQUE $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$

(b) $\dfrac{\sqrt[n]{n!}+1}{n+2} \simeq \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ ← BASTA FARE QUESTO

ANCHE $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ CONVIENE FARLO CON CESARO: $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{n!}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{\cancel{(n+1)}\, n^n}{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n} =$$

$n+1$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} \quad \left(\text{è reciproco di } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e\right)$$

DUNQUE $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$

$$\left(\text{cioè } \sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e} + o(n) = \frac{n}{e}\left(1+o(1)\right)\right)$$

ES.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n\, n!}{n^n}$$ al variare di $A>0$

(SI PUÒ FARE ECCETTO CHE PER $A=e$, nel qual caso non si capisce cosa venga)

Teorema (Proprietà degli o piccoli e degli o grandi)

Siano $\{a_n\}$ e $\{a'_n\}$ successioni fissate.

1. $b_n \simeq a_n \Leftrightarrow b_n = a_n + o(a_n)$;
2. $b_n = o(a_n) \Rightarrow b_n = O(a_n)$ $\quad o(a_n) = O(a_n)$;
3. $Se\ b_n = O(a_n), b'_n = O(a_n) \Rightarrow b_n + b'_n = O(a_n)$ $\quad O(a_n) + O(a_n) = O(a_n)$;
4. $Se\ b_n = o(a_n), b'_n = o(a_n) \Rightarrow b_n + b'_n = o(a_n)$ $\quad o(a_n) + o(a_n) = o(a_n)$;
5. $Se\ b_n = O(a_n), b'_n = o(a_n) \Rightarrow b_n + b'_n = O(a_n)$ $\quad O(a_n) + o(a_n) = O(a_n)$;
6. $Se\ b_n = O(a_n), b'_n = O(a'_n) \Rightarrow b_n b'_n = O(a_n a'_n)$ $\quad O(a_n)O(a'_n) = O(a_n a'_n)$;
7. $Se\ b_n = o(a_n), b'_n = o(a'_n) \Rightarrow b_n b'_n = o(a_n a'_n)$ $\quad o(a_n)o(a'_n) = o(a_n a'_n)$;
8. $Se\ b_n = O(a_n), b'_n = o(a'_n) \Rightarrow b_n b'_n = o(a_n a'_n)$ $\quad O(a_n)o(a'_n) = o(a_n a'_n)$;
9. $Se\ b_n = O(a_n), c_n = O(b_n) \Rightarrow c_n = O(a_n)$ $\quad O(O(a_n)) = O(a_n)$;
10. $Se\ b_n = O(a_n), c_n = o(b_n) \Rightarrow c_n = o(a_n)$ $\quad o(O(a_n)) = o(a_n)$;
11. $Se\ b_n = o(a_n), c_n = O(b_n) \Rightarrow c_n = o(a_n)$ $\quad O(o(a_n)) = o(a_n)$;
12. $Se\ b_n = o(a_n), c_n = o(b_n) \Rightarrow c_n = o(a_n)$ $\quad o(o(a_n)) = o(a_n)$;

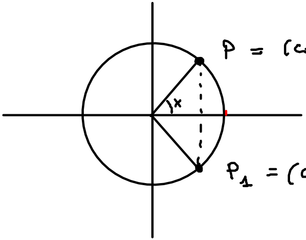
Altri limiti importanti

Proprietà

Se $\{a_n\}$ è una successione che tende a zero si ha:

- $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e;$
- $(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e;$
- $\ln(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to 1;$
- $\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n} \to 1;$
- se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\dfrac{(a_n+1)^{\alpha}-1}{a_n} \to \alpha;$
- $\dfrac{\sin(a_n)}{a_n} \to 1;$ ⇒
- $\dfrac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} \to \dfrac{1}{2}.$ ⇒

$x > 0$



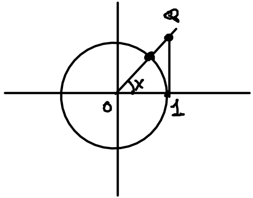
$P = (\cos(x), \sin(x))$

$P_1 = (\cos(x), -\sin(x))$

$$\overline{PP_1} \leq \text{arco tra } P \text{ e } P_1 = 2x$$

$$\overline{PP_1} = 2\sin(x)$$

QUINDI se $x \geq 0$ $\quad \sin(x) \leq x$



$Q = (1, \operatorname{tg}(x))$

Area del settore $\le$ Area triangolo $\widehat{0, 1, Q}$

$$\underbrace{\text{Area del settore}}_{=\frac{x}{2}} \quad (\text{area del cerchio} = \pi) \qquad \underbrace{\text{Area triangolo}}_{=\frac{\operatorname{tg}(x)}{2}}$$

$\Rightarrow$ altra disuguaglianza $\quad x \le \operatorname{tg}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\Rightarrow \quad x\cos(x) \le \sin(x) \le x \qquad (x > 0)$$

SE DIVIDO PER x

$$\boxed{\cos(x) \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1}$$

$x > 0$ MA ANCHE PER $x < 0$ (combinando due segni)

· Allora se $a_n \to 0$, posso scrivere

$$\cos(a_n) \le \frac{\sin(a_n)}{a_n} \le 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$$

$\cos(a_n) \to 1$ (diamolo per buono)

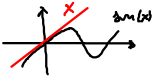
• Se considero il coseno:

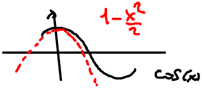
$$\frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{(1-\cos(a_n))(1+\cos(a_n))}{a_n^2\,(1+\cos(a_n))} = \frac{1-\cos^2(a_n)}{a_n^2\,(1+\cos(a_n))}$$

$$= \left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos(a_n)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}$$

$\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)^2 \to 1^2 = 1$

DUNQUE, se $a_n \to 0$





$$\sin(a_n) = a_n + o(a_n) \quad ; \quad \cos(a_n) = 1 - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)$$

Nota

I limiti precedenti si esprimono in MANIERA EQUIVALENTE scrivendo: se $\{a_n\}$ è una successione che tende a zero si ha:

- $\ln(1+a_n) = a_n + o(a_n)$;
- $e^{a_n} = 1 + a_n + o(a_n)$;
- $(1+a_n)^\alpha = 1 + \alpha a_n + o(a_n)$;
- $\sin(a_n) = a_n + o(a_n)$;
- $\cos(a_n) = 1 - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)$.

NOTA

$$o\left(a_n + o(a_n)\right) = o\left(O(a_n)\right) = o(a_n)$$

$$a_n + O(a_n) = O(a_n)$$