Analisi Matematica 1
Decima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

6 novembre 2009

Esercizio

Ordinare le sequenti successioni per ordine di infinito crescente.

$$a_n := \frac{n+3}{3n+1}, \qquad b_n := \frac{n+3^n}{3n+4^n}, \qquad c_n := \frac{n^5+n3^n}{1+2^n},$$

$$d_n := \frac{n!+n^2 3^n}{n^n+2^n}, \qquad e_n := \frac{3^n+n^2 2^n}{1+n}, \qquad f_n := n^2+n^4 3^{-n}$$

per esempio $a_n \simeq \frac{1}{3}$ $\qquad b_n \simeq \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$

tra le due a_n ha ORDINE DI INFINITO MAGGIORE IN quanto $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty$

· Altri risultati importanti sulle successioni (riassunti alla fine)

(1) Supponiamo $a_n \to +\infty \Rightarrow \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$

Generalizza il caso $a_n = n$

Dim. Ricordiamo che $[x] \in \mathbb{N}$, $[x] \leq x < [x]+1$

Possiamo scrivere:

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \leq \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} = \frac{\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]+1}}{\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)}$$

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1} = \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]}\left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)$$

NOTIAMO CHE $\left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]}$ è la succ. che tende a e

dove al posto di n c'è $\sigma_n = [a_n] \to +\infty$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[\sigma_n]}\right)^{[\sigma_n]} \to e$

Per lo stesso motivo $\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]+1} \to e$

Inoltre $\left(1+\frac{1}{[a_n]}\right) \to 1$ e $\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right) \to 1$

Dunque, per il confronto $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$ #

- Se ne deduce per esempio che, se $x>0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = e^x$$

$$\left(a_n = \frac{n}{x} \to +\infty\right)$$

- Caso $a_n \to -\infty$. Se $a_n \to -\infty \Rightarrow \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$

Mi riconduco al caso precedente ("$a_n \to +\infty$").

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(\frac{a_n+1-1}{a_n+1}\right)^{-a_n} =$$

$$\left(1-\frac{1}{a_n+1}\right)^{-a_n-1}\left(1-\frac{1}{a_n+1}\right) = \underbrace{\left(1+\frac{1}{-a_n-1}\right)^{-a_n-1}}_{\to\, e}\underbrace{\left(1-\frac{1}{a_n+1}\right)}_{\to\, 1}$$

perché $-a_n-1 \to +\infty$

o. Ne segue che $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ qualunque sia $x \in \mathbb{R}$

- Se $|a_n| \to +\infty \Rightarrow \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$

(idea: si possono trovare due successioni $\{\sigma_n^1\}, \{\sigma_n^2\}$ tali che $a_{\sigma_n^1} \to +\infty$, $a_{\sigma_n^2} \to -\infty$, $\{\sigma_n^1\}$ e $\{\sigma_n^2\}$ esauriscono $\mathbb{N}$. Allora $\left(1+\frac{1}{a_{\sigma_n^1}}\right)^{a_{\sigma_n^1}} \to e$; $\left(1+\frac{1}{a_{\sigma_n^2}}\right)^{a_{\sigma_n^2}} \to e$

$\Rightarrow$ per un Teorema visto, si ha

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$$

- Se $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$ $\forall n$ $\Rightarrow \boxed{(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e}$ (*)

Dim. chiamo $b_n = \frac{1}{a_n}$; allora $|b_n| \to +\infty$ da cui

$$(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \to e$$

- Se $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$ $\Rightarrow \boxed{\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1}$ ←

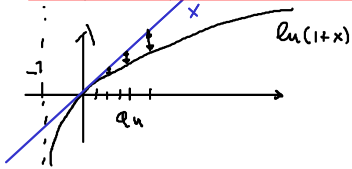
Dim Basta fare il ln di (*)

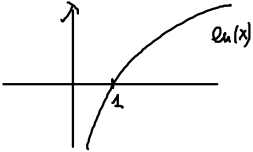
· Vari modi equivalenti di leggere il limite sopra (†)

(i) $\ln(1+a_n) \simeq a_n$ (se $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$)

(ATTENZIONE, DATO CHE $a_n \to 0$ STO "ESPLORANDO" $\ln(1+x)$ per x vicino a zero)

(ii) $\ln(1+a_n) = a_n + o(a_n)$





gli scarti $\ln(1+a_n) - a_n$ vanno a zero più velocemente di a_n

• $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$. Allora: $\boxed{\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n} \to 1}$

Dim. Definisco $b_n = e^{a_n} - 1$. $b_n \to 0$, $b_n \neq 0$. Inoltre

- $b_n + 1 = e^{a_n} \iff a_n = \ln(1+b_n)$, da cui

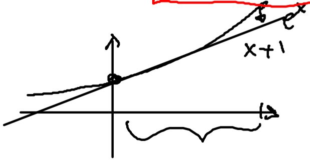
$$\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = \frac{b_n}{\ln(1+b_n)} \to \frac{1}{1} = 1 \quad \text{(per il caso precedente!)}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}}}$$

DUNQUE, se $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$

$$e^{a_n} - 1 \simeq a_n \iff e^{a_n} - 1 = a_n + o(a_n)$$

$$\iff \boxed{e^{a_n} = 1 + a_n + o(a_n)}$$



- $a_n \to 0$, $a_n \neq 0 \ \forall n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} \longrightarrow \ ?!$$

· per es. se $\alpha = 2$

$$\frac{(1+a_n)^2 - 1}{a_n} = \frac{\cancel{1} + 2\cancel{a_n} + a_n^{\cancel{2}} - \cancel{1}}{\cancel{a_n}} = 2 + a_n \to 2$$

$\alpha = 3$

$$\frac{(1+a_n)^3 - 1}{a_n} = \frac{\cancel{1} + 3\cancel{a_n} + 3a_n^{\cancel{2}} + a_n^{\cancel{3}\,2} - \cancel{1}}{\cancel{a_n}} = 3 + 3a_n + a_n^2 \to 3$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{1+a_n} - 1}{a_n} = \frac{\cancel{1}+ \cancel{a_n} - \cancel{1}}{\cancel{a_n}\left(\sqrt{1+a_n} + 1\right)} \to \frac{1}{2}$$

IN GENERALE se $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha}$$

Dim.

$$\frac{(1+a_n)^\alpha-1}{a_n}=\frac{e^{\alpha\ln(1+a_n)}-1}{a_n}=$$

$$\frac{e^{\alpha\ln(1+a_n)}-1}{\alpha\ln(1+a_n)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+a_n)}{a_n}=\underbrace{\frac{e^{b_n}-1}{b_n}}_{\to 1}\,\alpha\,\underbrace{\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}}_{\to 1}\to\alpha$$

dove $b_n=\alpha\ln(1+a_n)\to 0$, $b_n\neq 0\ \forall n$

DUNQUE

$$(1+a_n)^\alpha-1\simeq\alpha a_n \iff$$

$$(1+a_n)^\alpha-1=\alpha a_n+o(a_n) \iff$$

$$\boxed{(1+a_n)^\alpha=1+\alpha a_n+o(a_n)}$$

Altro modo di fare il limite della volta scorsa :

$$\frac{\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2}{n} = \frac{(n^4+n^3+1)^{1/2}-n^2}{n} =$$

$$\frac{n^2}{n}\left(\left(1+\underbrace{1/n+1/n^4}_{a_n}\right)^{1/2}-1\right) = n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}\right)+o\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}\right)\right) =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\downarrow\ \frac{1}{2}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}_{\downarrow\ 1}+\underbrace{n\,o\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}_{\downarrow\ 0\ ??} \to \frac{1}{2}$$

SO CHE $\dfrac{o\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}} \to 0$ $\quad(\times)$

$\Downarrow$

$$n\,o\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}\right) = \frac{o\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$\underbrace{\frac{o\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n}}}_{\to 1}$$

"MORALMENTE"

$$o\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

• L'ultimo procedimento non è tanto meglio della razionalizzazione

PERò, mettiamo di dover calcolare

$$\sqrt[10]{n^4+n^3+1} - n^{\frac{2}{5}} = a_n \longrightarrow ?$$

Si potrebbe usare la formula $a^{10}-b^{10} = (a-b)(a^9+a^8 b + a^7 b^2 + \dots + b^9)$

con $a = \sqrt[10]{n^4+n^3+1}$, $b = n^{\frac{2}{5}}$

MOLTO LUNGO

IN ALTERNATIVA, POSSO USARE IL SECONDO METODO

$$a_n = n^{\frac{2}{5}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 \right\} =$$

$(1+a_n)^{\alpha} = 1 + \alpha a_n + o(a_n)$

$\alpha = \frac{1}{10}$, a_n $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$

$$n^{\frac{2}{5}} \left\{ \cancel{1} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}\right) + \underbrace{o\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}\right)} - \cancel{1} \right\}$$

$$n^{\frac{2}{5}} \left\{ \frac{1}{10}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} = n^{\frac{2}{5}} \left\{ \frac{1}{10}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$(*) = \frac{n^{\frac{2}{5}-1}}{10} + o\left(n^{\frac{2}{5}-1}\right)$$

QUI MI FERMO

($a_n\, o(b_n) = o(a_n b_n)$ ORA LO VEDIAMO)

HO TROVATO CHE

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[10]{n^4+n^3+1} - n^{\frac{2}{5}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{2}{5}-1}}{10} = 0$$

(perché $\frac{2}{5}<1$)

INOLTRE

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{5}}\left(\sqrt[10]{n^4+n^3+1} - n^{\frac{2}{5}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{5}}\left(\frac{n^{\frac{2}{5}-1}}{10} + o\left(n^{\frac{2}{5}-1}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{3}{5}}\, n^{-\frac{3}{5}}}{10} = \frac{1}{10}$$

(TUTT'ALTRO CHE FACILE DA TROVARE RAZIONALIZZANDO

Ordini di infinitesimo - O grandi

Definizione

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Diremo che $\{a_n\}$ è **o grande** di $\{b_n\}$, se

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \text{ è una successione limitata}$$

e scriveremo

$$a_n = O(b_n)$$

Anche qui, se vogliamo ammettere il caso $b_n = 0$ per alcuni n, dovremmo sostituire la riga sopra con la richiesta che $a_n = b_n c_n$ per un'opportuna $\{c_n\}$ con $\{c_n\}$ limitata.

Osservazione

La nozione $a_n = O(b_n)$ vuole esprimere il fatto che $\{a_n\}$ ha ordine di infinitesimo maggiore o eguale a quello di $\{b_n\}$. In effetti tale relazione è riflessiva e transitiva, mentre $a_n = o(b_n)$ è solo transitiva.

- $a_n = O(a_n)$;
- $a_n = O(b_n)$, $b_n = O(c_n)$ implica $a_n = O(c_n)$;
- $a_n = o(b_n)$, $b_n = o(c_n)$ implica $a_n = o(c_n)$.

$n = O(2n)$

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

Nota

Non tutte le successioni sono confrontabili rispetto all'ordine di infinitesimo (o infinito). Per esempio se

$$a_n = (1-(-1)^n)n, \quad b_n = 1$$

$(a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 6, a_4 = 0, a_5 = 10, a_6 = 0 \ldots)$
allora il rapporto $\dfrac{a_n}{b_n}$ (che coincide con a_n) non ha limite e non è neppure limitato.
Quindi non vale **NESSUNA** tra le

$$a_n = o(b_n), \quad a_n = O(b_n), \quad b_n = o(a_n), \quad b_n = O(a_n).$$

Teorema (Proprietà degli o piccoli e degli o grandi)

Siano $\{a_n\}$ *e* $\{a'_n\}$ *successioni fissate.*

NON SONO
VERI =

1. $b_n \simeq a_n \Leftrightarrow b_n = a_n + o(a_n)$;
2. $b_n = o(a_n) \Rightarrow b_n = O(a_n)$ $\quad o(a_n) = O(a_n)$;
3. $Se\ b_n = O(a_n), b'_n = O(a_n) \Rightarrow b_n + b'_n = O(a_n)$ $\quad O(a_n) + O(a_n) = O(a_n)$;
4. $Se\ b_n = o(a_n), b'_n = o(a_n) \Rightarrow b_n + b'_n = o(a_n)$ $\quad o(a_n) + o(a_n) = o(a_n)$;
5. $Se\ b_n = O(a_n), b'_n = o(a_n) \Rightarrow b_n + b'_n = O(a_n)$ $\quad O(a_n) + o(a_n) = O(a_n)$;
6. $Se\ b_n = O(a_n), b'_n = O(a'_n) \Rightarrow b_n b'_n = O(a_n a'_n)$ $\quad O(a_n)O(a'_n) = O(a_n a'_n)$;
7. $Se\ b_n = o(a_n), b'_n = o(a'_n) \Rightarrow b_n b'_n = o(a_n a'_n)$ $\quad o(a_n)o(a'_n) = o(a_n a'_n)$;
8. $Se\ b_n = O(a_n), b'_n = o(a'_n) \Rightarrow b_n b'_n = o(a_n a'_n)$ $\quad O(a_n)o(a'_n) = o(a_n a'_n)$;
9. $Se\ b_n = O(a_n), c_n = O(b_n) \Rightarrow c_n = O(a_n)$ $\quad O(O(a_n)) = O(a_n)$;
10. $Se\ b_n = O(a_n), c_n = o(b_n) \Rightarrow c_n = o(a_n)$ $\quad o(O(a_n)) = o(a_n)$;
11. $Se\ b_n = o(a_n), c_n = O(b_n) \Rightarrow c_n = o(a_n)$ $\quad O(o(a_n)) = o(a_n)$;
12. $Se\ b_n = o(a_n), c_n = o(b_n) \Rightarrow c_n = o(a_n)$ $\quad o(o(a_n)) = o(a_n)$;

ALCUNE VERIFICHE

$o(a_n) + O(a_n) = O(a_n)$ COSA VUOL DIRE ?

vuol dire che :

se $\begin{array}{l} b_n = o(a_n) \\ c_n = O(a_n) \end{array} \Rightarrow b_n + c_n = O(a_n)$

CIOÈ se $\frac{b_n}{a_n} \to 0$, $\frac{c_n}{a_n}$ LIMITATA

$\Rightarrow \frac{b_n + c_n}{a_n}$ LIMITATA (CHIARO)

$= \underbrace{\frac{b_n}{a_n}}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{\frac{c_n}{a_n}}_{\text{LIMITATA}}$

IN GENERALE NON POSSO SCRIVERE $o(a_n) + O(a_n) = o(a_n)$

perché non è detto che $\frac{b_n + c_n}{a_n} \to 0$

(anche se a volte può andare bene)

$\cdot \quad o(o(a_n)) = o(a_n)$ COSA SIGNIFICA ?

$\to$ Se $b_n = o(a_n)$, se $c_n = o(b_n)$ $\Rightarrow$ $c_n = o(a_n)$

COME MAI È VERA ?

NE BASTA UNO CHE TENDA A ZERO

$$b_n \doteq o(a_n) \iff \frac{b_n}{a_n} \to 0$$

$$c_n = o(b_n) \iff \frac{c_n}{b_n} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_n}{a_n} = \underbrace{\underset{\downarrow \atop 0}{\frac{c_n}{b_n}} \cdot \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{b_n}{a_n}}} \to 0$$

$\to$ $o(O(a_n)) = o(a_n)$

$O(o(a_n)) = o(a_n)$

mentre $O(O(a_n))$ è solo $O(a_n)$

Altri limiti importanti (visti all'inizio della lezione)

Proprietà

- Se $|a_n| \to +\infty \Rightarrow \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$ ⇒
- Se $a_n \to 0 \Rightarrow (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e$ ⇒
- Se $a_n \to 0 \Rightarrow \ln(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to 1$ ⇒
- Se $a_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{e^{a_n}-1}{a_n} \to 1$ ⇒
- Se $a_n \to 0, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{(a_n+1)^{\alpha}-1}{a_n} \to \alpha$ ⇒

Nota

Da quanto sopra si deduce che (anzi è equivalente a), se $a_n \to 0$

- $\ln(1+a_n) = a_n + o(a_n)$;
- $e^{a_n} = 1 + a_n + o(a_n)$;
- $(a_n+1)^{\alpha} = 1 + \alpha a_n + o(a_n)$