Analisi Matematica 1
Nona lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

5 novembre 2009

Successioni asintotiche

Definizione

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono **asintotiche**, se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Per indicare che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche scriveremo

$$a_n \simeq b_n$$

Osservazione

C'è un problema: bisogna richiedere: $b_n \neq 0$. Per esempio non possiamo scrivere $0 \simeq 0$.
Potremmo però modificare leggermente la definizione: $a_n \simeq b_n$ se esiste una terza successione $\{c_n\}$ tale che

$$c_n \to 1, \quad a_n = b_n c_n$$

Nella pratica però la prima forma della definizione va sempre bene.

Proprietà

La relazione $a_n \simeq b_n$ è **riflessiva**, **simmetrica** e **transitiva**.

Esempi

$$\frac{n}{1+n^2} \simeq \frac{1}{n}, \qquad n^4 \simeq \left(\frac{n^3}{1+n}\right)^2, \qquad \frac{n^3+\sin(n)}{n^2-n+2} \simeq n$$

Teorema (facile ma importante)

Se

$$a_n \simeq a'_n, \quad b_n \simeq b'_n, \quad c_n \simeq c'_n,$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n b_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a'_n b'_n}{c'_n}$$

nel senso che $\frac{a_n b_n}{c_n}$ *e* $\frac{a'_n b'_n}{c'_n}$ *hanno lo* ***stesso carattere*** *(una è regolare se e solo se lo è l'altra) e l'equaglianza sopra vale se hanno senso i suoi termini.*

Ordini di infinito

Definizione

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Diremo che $\{a_n\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\{b_n\}$, se

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$$

Osservazione

Anche in questo caso bisogna richiedere $b_n \neq 0$. Lo si può evitare dicendo che $\{a_n\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\{b_n\}$ se esiste una successione $\{c_n\}$ tale che

$$|c_n| \to +\infty, \quad a_n = b_n c_n$$

Nota

Di solito $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tendono all'infinito (in modulo) e in questo caso si dice che $\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore a $\{b_n\}$. Questo però non è strettamente necessario. Vedi a questo proposito gli esempi che seguono.

Esempi

- $\{n^2\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\{n\}$;
- $\{n^3\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\left\{\frac{n^5-n^3}{1+n}\right\}$;
- $\{n^2\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\left\{\sqrt{n^2+1}\right\}$;
- $\{n\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\{1\}$ (questo è **solo** un modo alternativo di dire che $n \to +\infty$);
- $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ (!!!).

Teorema (principio di sostituzione degli infiniti)

Se $\{a_n\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\{d_n\}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+b_n}{c_n+d_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n}$$

(nel senso che se esiste uno dei limiti, esiste anche l'altro e sono eguali).
Si possono trascurare i termini con ordine di infinito più basso.

Ordini di infinitesimo

Definizione

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Diremo che $\{a_n\}$ ha **ordine di infinitesimo superiore** a quello di $\{b_n\}$, se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Anche qui, se vogliamo ammettere il caso $b_n = 0$ per alcuni n, dovremmo sostituire la riga sopra con la richiesta che $a_n = b_n c_n$ per un'opportuna $\{c_n\}$ tale che $c_n \to 0$.
Un altro modo di dire la proprietà sopra sarà di dire che $\{a_n\}$ **è un o piccolo di** $\{b_n\}$ e scrivere

$$a_n = o(b_n)$$

Nota

Dire che $\{a_n\}$ ha ordine di infinitesimo superiore a quello di $\{b_n\}$ è esattamente lo stesso che dire $\{b_n\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\{a_n\}$. Introduciamo comunque entrambe le definizioni perchè, a seconda dei casi è più espressivo usare una o l'altra.

Nota

Di solito $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tendono a zero e in questo caso si dice che $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\{b_n\}$. Questo però non è strettamente necessario (vedi esempi).

Esempi

- $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$; $\frac{n^2-n}{n^5+n^3+2} = o\left(\frac{2}{n^2}\right)$;
- $\frac{1}{n} = o(1)$; $n = o(n^2)$ (!!!).

Quindi dire che $a_n = o(1)$ è un altro modo di dire che $a_n \to 0$.

Teorema (principio di sostituzione degli infinitesimi)

Se $\{a_n\}$ ha ordine di infinitesimo superiore a quello di $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ ha ordine di infinitesimo superiore a quello di $\{d_n\}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+b_n}{c_n+d_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{d_n}$$

(nel senso che se esiste uno dei limiti, esiste anche l'altro e sono eguali).
Si possono trascurare i termini con ordine di infinitesimo più alto.

· Osservazione

$$a_n \simeq b_n \iff a_n = b_n + o(b_n)$$

Infatti $\frac{a_n}{b_n} \to 1 \iff \frac{a_n - b_n}{b_n} \to 0$

Esempio Sia $a_n = \frac{n^3+n+1}{n^5-n^3+1}$. Allora $a_n \simeq \frac{1}{n^2}$

dato che $\frac{a_n}{1/n^2} = n^2 a_n = \frac{n^2(n^3+n+1)}{n^5-n^3+1} = \frac{n^5+n^3+n^2}{n^5-n^3+1} \to 1$

Detto in modo equivalente $a_n = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Voglio "ingrandire" il termine $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Si ha

$$a_n - \frac{1}{n^2} = \frac{n^3+n+1}{n^5-n^3+1} - \frac{1}{n^2} = \frac{\cancel{n^5}+n^3+n^2-\cancel{n^5}+n^3-1}{n^2(n^5-n^3+1)} = \frac{2n^3+n^2-1}{n^7-n^5+n^2}$$

Allora (per il solito discorso sui rapporti tra polinomi) $a_n - \frac{1}{n^2} \simeq \frac{2}{n^4}$

e cioè $a_n - \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{2}{n^4}\right) \iff a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{2}{n^4}\right)$

- Possiamo continuare:

$$a_n - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^4} = \frac{2n^3+n^2-1}{n^7-n^5+n^2} - \frac{2}{n^4} = \frac{\cancel{2n^7}+n^6-n^4-2(\cancel{n^7}-n^5+n^2)}{n^{11}-n^9+n^6} =$$

$$\frac{n^6+2n^5-n^4-2n^2}{n^{11}-n^9+n^6} \simeq \frac{1}{n^5}$$ e quindi

$$a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$ e potremmo andare avanti.

Esercizio

Ordinare le sequenti successioni per ordine di infinito crescente.

$$a_n := \frac{n+3}{3n+1}, \qquad b_n := \frac{n+3^n}{3n+4^n}, \qquad c_n := \frac{n^5+n3^n}{1+2^n},$$

$$d_n := \frac{n!+n^2 3^n}{n^n+2^n}, \qquad e_n := \frac{3^n+n^2 2^n}{1+n}, \qquad f_n := n^2+n^4 3^{-n}$$

Nota

I principi di sostituzione o il primo teorema sulle successioni asintotiche valgono **SOLO** nei casi indicati nei rispettivi enunciati. Per esempio il ragionamento

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4}-n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{n} = 0$$

in cui si trascura n^3+1 che è un infinito di ordine più basso rispetto a n^4

È SBAGLIATO

(il caso non è contemplato da nessuno dei teoremi precedenti)
In effetti facendo correttamente i calcoli il limite sopra fa $\frac{1}{2}$:

Osservazione

Le scritture $a_n = o(b_n)$/ $a_n = O(b_n)$ si riveleranno molto comode ma non sono rigorose. In effetti il simbolo $=$ utilizzato in queste scritture **non è una vera eguaglianza**. Infatti dalle proprietà vere

$$\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

NON si può dedurre per differenza

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right) - o\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

In realtà la formulazione corretta sarebbe

$$\{a_n\} \in o(b_n)$$

$$o(b_n) = \{\text{successioni con ordine di infinitesino maggiore di } \{b_n\}\}.$$

Allora non è strano che $o\left(\frac{1}{n}\right) - o\left(\frac{1}{n}\right)$ non sia zero, nel senso che l'insieme di tutte le possibili differenze non è $\{0\}$.

Esercizio

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2}{n}$$

Guardiamo il numeratore (di cui non è chiaro il limite)

$$\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2 = \frac{\left(\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+n^3+1}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+n^3+1}+n^2} =$$

$$\frac{\cancel{n^4}+n^3+1-\cancel{n^4}}{n^2\left(\sqrt{1+1/n+1/n^4}+1\right)} = \frac{n^3+1}{n^2\left(1+o(1)+1\right)} =$$

$$\frac{n^3}{n^2}\,\frac{1+o(1)}{2+o(1)} = \frac{n}{2}\left(1+o(1)\right)$$

$$= \frac{n}{2}+o\left(\frac{n}{2}\right)$$

NOTA: Tutti questi $o(1)$ non sono necessariamente gli stessi a ogni passaggio — scrivere $o(1)$ vuole solo dire che al posto di $o(1)$ ci va una successione che tende a zero.

Dunque abbiamo due cose:

(1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^4+n^3+1} - n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} + o\left(\frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$

SOLO QUI POSSO UCCIDERE l'o PICCOLO

(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3+1} - n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{2}+o\left(\frac{n}{2}\right)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}$

Al fine di calcolare i limiti (1) e (2) mi è bastato sapere che $\sqrt{n^4+n^3+1} - n^2 = \frac{n}{2} + o\left(\frac{n}{2}\right)$ (cioè $\sqrt{n^4+n^3+1} = n^2 + \frac{n}{2} + o\left(\frac{n}{2}\right)$)

Vediamo che tale informazione NON BASTA se si vuole trovare $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^4+n^3+1} - n^2 - \frac{n}{2}$ — infatti otterrei $\lim_{n\to+\infty} o\left(\frac{n}{2}\right)$ di cui so solo che DIVISO PER $\frac{n}{2}$ mi dà ZERO, ma NON SO a quanto tende da solo.

· Detto in altri termini dall'informazione

$$\sqrt{n^4+n^3+1} - n^2 = \frac{n}{2}(1+o(1)) \qquad \text{deduco}$$

$$\sqrt{n^4+n^3+1} - n^2 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}\, o(1) \leftarrow$$ A COSA TENDE? NON LO SO!!

Per risolvere questo ultimo limite devo ricominciare da capo

$$\sqrt{n^4+n^3+1} - n^2 - n/2 =$$

$$\frac{\left(\sqrt{n^4+n^3+1} - n^2 - n/2\right)\left(\sqrt{n^4+n^3+1} + n^2 + n/2\right)}{\sqrt{n^4+n^3+1} + n^2 + n/2} =$$

$$\frac{n^4+n^3+1-(n^2+n/2)^2}{\sqrt{n^4+n^3+1} + n^2 + n/2} = \frac{\cancel{n^4}+\cancel{n^3}+1-(\cancel{n^4}+\cancel{n^3}+n^2/4)}{n^2\left(\sqrt{1+1/n+1/n^3}+1+1/2n\right)} =$$

$$= \frac{-n^2/4+1}{n^2(2+o(1))} = -\frac{1}{8}\,\frac{\cancel{n^2}(1+o(1))}{\cancel{n^2}(1+o(1))} = -\frac{1}{8}(1+o(1)) = -\frac{1}{8} + o\left(-\frac{1}{8}\right)$$

· In questo modo abbiamo trovato

$$\sqrt{n^4+n^3+1} = n^2+\frac{n}{2}-\frac{1}{8}+o\left(-\frac{1}{8}\right)$$

che È DI PIÙ di quanto avevamo trovato prima. In sostanza nella prima formula

$$\sqrt{n^4+n^3+1} = n^2+\frac{n}{2}+o\left(\frac{n}{2}\right)$$

abbiamo "ingrandito" il termine $o\left(\frac{n}{2}\right)$ trovando che è del tipo $-\frac{1}{8}+o\left(-\frac{1}{8}\right)$. Questo ci permette di ottenere

(3) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^4+n^3+1}-n^2-\frac{n}{2} = -\frac{1}{8}$$