Analisi Matematica 1
Ottava lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

30 ottobre 2009

Teorema (di composizione)

Siano $\{a_n\}$ *una successione e sia* $\{\sigma_n\}$ *un'altra successione tale che*

$$\sigma_n \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$$

Allora se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

necessariamente si ha

$$\lim_{k\to\infty} a_{\sigma_k} = l$$

DIM

- Se $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, se $\sigma_k \to +\infty$ $(\sigma_k \in \mathbb{N})$

$\Longrightarrow$ $a_{\sigma_k} \xrightarrow{k \to +\infty} +\infty$

Dim (1) Dire che $a_n \to \ell$ significa che (caso $\ell \in \mathbb{R}$)

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ n_0 tale che $\forall n \geq n_0$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$

(2) Dire che $\sigma_k \to +\infty$ significa che

$\forall c \in \mathbb{R}$ $\exists$ k_0 tale che $\forall k \geq k_0$ $\sigma_k \geq c$

Fisso $\varepsilon > 0$; trovo n_0 per cui vale la prima,

Prendo $c = n_0$ trovo k_0 tale che $\forall k \geq k_0$ $\sigma_k \geq n_0$

Per questi k $|a_{\sigma_k} - \ell| < \varepsilon$

HO VERIFICATO CHE $a_{\sigma_k} \to \ell$

ESEMPIO Se $\sqrt[n]{2} \to 1$ $\sqrt[2k]{2} \to 1$ $(\sigma_k = 2k)$

Sottosuccessioni

Definizione

Sia $\{a_n\}$ una successione. Chiamiamo *sottosuccessione di* $\{a_n\}$ oppure *successione estratta da* $\{a_n\}$ una successione $\{b_n\}$ tale che

$$b_n = a_{\sigma_n}$$

dove $\{\sigma_n\}$ è una successione di interi strettamente crescente.

Teorema (limite delle sottosuccessioni)

Se $\{b_n\}$ è estratta da $\{a_n\}$ e se $\{a_n\}$ ha limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ allora anche $\{b_n\}$ ha limite l.

La dimostrazione segue immediatamente dal precedente teorema di composizione. (*)

NON VALE IL VICEVERSA (* *)

(*) Se $\sigma_{n+1} > \sigma_n$, se σ_n È A VALORI INTERI

$$\sigma_{n+1} \geq \sigma_n + 1$$

Se ne deduce $\sigma_n \geq n \Rightarrow \sigma_n \to +\infty$

Conseguenza: Se trovo due estratte $\{a_{\sigma_n}\}$ e $\{a_{\sigma'_n}\}$ aventi limiti diversi $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ NON HA LIMITE

Per esempio $a_n = (-1)^n$ NON ammette limite. Infatti

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1 \;/\; a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1$$

Questo mostra anche che non vale il viceversa (**)

Teorema

Se $\{\sigma'_n\}$ e $\{\sigma''_n\}$ sono due successioni di interi strettamentente crescenti tali che il loro valori esauriscono tutto $\mathbb{N}$, cioè:

$$\left\{\sigma'_n : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\sigma''_n : n \in \mathbb{N}\right\} = \mathbb{N},$$

se $\{a_n\}$ è una successione tale che, per un medesimo l in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{k\to+\infty} a_{\sigma'_k} = l, \qquad \lim_{k\to+\infty} a_{\sigma''_k} = l,$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l.$$

(NO DIM.)

Tipicamente $\sigma'_n = 2n$ / $\sigma''_n = 2n+1$

Dire se le seguenti successioni convergono e in caso affermativo trovarne il limite.

1. $\left\{ \dfrac{(-1)^n n + 1}{n+3} \right\}$
2. $\left\{ n^3 - (-1)^n n^2 + 1 \right\}$
3. $\left\{ (-1)^n n^3 + n^2 + 1 \right\}$
4. $\left\{ \dfrac{(-1)^n n^3 - n^2 + 1}{n^4 + n + 11} \right\}$
5. $\left\{ \dfrac{1 + (-1)^n n^3 + n^4}{1 + n - n^3} \right\}$
6. $\left\{ (-3)^n + n^8 \right\}$
7. $\left\{ (-3)^n - n! \right\}$

$$\frac{(-1)^n}{n^3} = \frac{\text{limitato}}{\text{infinito}} \to 0$$

(5) Distinguendo pari e dispari:

$$a_{2n} = \frac{1 + 8n^3 + 16n^4}{1 + 2n - 8n^3} \to \frac{16}{-8} \cdot +\infty = -\infty$$

$$a_{2n+1} = \frac{1 - (2n+1)^3 + (2n+1)^4}{1 + (2n+1) - (2n+1)^3} \to \frac{16}{-8} \cdot +\infty = -\infty$$

DUNQUE $a_n \to -\infty$.

POTEVO ANCHE DIRE:

$$a_n = \frac{n^4}{n^3} \cdot \frac{1/n^4 + (-1)^n/n^3 + 1}{1/n^3 + 1/n^2 - 1} = n \cdot \frac{\text{infinitesimi} + 1}{\text{infinitesimi} - 1} \to -\infty$$

① $$a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n+3}$$

$$a_{2n} = \frac{2n+1}{2n+3} \to \frac{2}{2} = 1$$

$$a_{2n+1} = \frac{-(2n+1)+1}{2n+1+3} = \frac{-2n}{2n+4} \to \frac{-2}{2} = -1$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ non ha limite. dato che $1 \neq -1$.

Altre proprietà dei limiti

Sia $\{a_n\}$ una successione e supponiamo che $a_n \to l$ per l numero reale. Allora.

1. $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{l}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (se k è pari deve essere $l \geq 0$)
2. Se $A > 0$, allora $A^{a_n} \to A^l$
3. Se $A > 0$, $A \neq 1$, $l > 0$ allora $\log_A(a_n) \to \log_A(l)$
4. Se $\alpha \in \mathbb{R}, l \geq 0$, allora $(a_n)^\alpha \to l^\alpha$
   (se $\alpha < 0$ deve essere $l > 0$) SEGUE DA 2 e 3 e contiene 1.

Inoltre se $a_n \to 0^+$:

5. Se $A > 1$, $\log_A(a_n) \to -\infty$
6. Se $0 < A < 1$, $\log_A(a_n) \to +\infty$
7. Se $\alpha < 0$, allora $(a_n)^\alpha \to +\infty$

Tutte le proprietà sopra danno che l'esponenziale e il logaritmo "vanno d'accordo con l'operazione di limite" (come vedremo sono **funzioni continue**)

- Se $a_n \to \ell \Rightarrow A^{a_n} \to A^{\ell}$ $(A>0)$

CASO $\ell = 0$ Se $a_n \to 0$ $A^{a_n} \to 1$

Abbiamo già visto il caso $a_n = \frac{1}{n}$ dato che abbiamo dim. $\sqrt[n]{A} \to 1$. Per considerare una generica $\{a_n\}$ tendente a zero posso fare così:

$$\sigma_n = \left[\frac{1}{a_n}\right] \qquad \frac{1}{a_n} \geq \sigma_n \geq \frac{1}{a_n} - 1$$

$\uparrow$ parte intera di $\frac{1}{a_n}$ $\Rightarrow \underline{\sigma_n \to +\infty}$

dato $x \in \mathbb{R}$

$$[x] \leq x < [x]+1$$

$$[x] \geq x-1$$

$$A^{a_n}$$

$$\shortparallel$$

$$A^{-\frac{1}{\sigma_n}} \leq A^{\frac{1}{1/a_n}} \leq A^{\frac{1}{\sigma_n}} \qquad \forall n$$

Ma $\quad A^{\frac{1}{\sigma_n}} \to 1$ perché $A^{1/n} \to 1$ e $\sigma_n \to +\infty$, $\sigma_n \in \mathbb{N}$

$A^{-\frac{1}{\sigma_n}} \to 1$ perché $A^{-\frac{1}{\sigma_n}} = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\sigma_n}} \to \frac{1}{1} = 1$

Per il teorema del confronto $\Longrightarrow \boxed{A^{a_n} \to 1}$

<u>Caso generale</u> $\quad$ Se $a_n \to \ell$

$$A^{a_n} - A^{\ell} = A^{\ell}\left(A^{a_n - \ell} - 1\right)$$

MA. $\quad a_n \to \ell \iff a_n - \ell \to 0 \Longrightarrow A^{a_n - \ell} \to 1 \Longrightarrow$

$A^{a_n - \ell} - 1 \to 0 \Longrightarrow A^{a_n} - A^{\ell} \to 0$

cioè $\quad A^{a_n} - A^{\ell}$

③ Consideriamo il caso del $\ln(a_n)$.

CASO $a_n \to 1$

CASO PARTICOLARE $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ dimostro che

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$.

NOTO CHE $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ DECRESCENTE, Dato che $\ln(x)$ è crescente in x $\Rightarrow$ $b_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ decrescente

Per monotonia b_n DEVE avere limite b : $b_n \to b \in \mathbb{R}$

$b = \inf \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 0$.

Per le proprietà dell'esponenziale $e^{b_n} \to e^{b}$

Ma $e^{b_n} = e^{\ln(1+1/n)} = 1 + 1/n \to 1 \Rightarrow e^{b} = 1 \Rightarrow b = 0$

Analogamente dimostro che $\ln(1-1/n) \to 0$

~ Ragionando con le parti intere si riesce a verificare che per una qualunque a_n tendente a uno si ha $\ln(a_n) \to 0$

Nel caso generale: $a_n \to l$ posso scrivere

$$\ln(a_n) - \ln(l) = \ln\left(\frac{a_n}{l}\right)$$

dato che $\frac{a_n}{l} \to 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{a_n}{l}\right) \to 0 \Rightarrow \ln(a_n) - \ln(l) \to 0$

Altre proprietá dei limiti

Se invece $a_n \to +\infty$

8. Se $A > 1$, allora $A^{a_n} \to +\infty$
9. Se $0 < A < 1$, allora $A^{a_n} \to 0^+$
10. Se $A > 1$, allora $\log_A(a_n) \to +\infty$
11. Se $0 < A < 1$, allora $\log_A(a_n) \to -\infty$
12. Se $\alpha > 0$, allora $(a_n)^\alpha \to +\infty$
13. Se $\alpha < 0$, allora $(a_n)^\alpha \to 0^+$

mentre se $a_n \to -\infty$

14. Se $A > 1$, allora $A^{a_n} \to 0^+$
15. Se $0 < A < 1$, allora $A^{a_n} \to +\infty$

Riassunto dei limiti notevoli visti fino ad ora

1. $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ per ogni α reale $\alpha > 0$
2. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{A} = 1$
3. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ per ogni k
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n}{n^k} = +\infty$ se $A > 1$ per ogni k
5. $\lim_{n\to+\infty} n^k A^n = 0^+$ se $0 < A < 1$ per ogni k
6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n}{n!} = 0$, per ogni $A > 0$
7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$