Analisi Matematica 1
Settima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

29 ottobre 2009

Limite di successioni monotone (crescente o decrescente)

Teorema

Sia $\{a_n\}$ *una successione crescente, (decrescente) cioè tale che:*

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n \qquad\qquad (a_n \geq a_{n+1} \qquad \forall n)\,.$$

(allora se $n \geq m \Rightarrow a_n \geq a_m$)

Allora $\{a_n\}$ *ammette limite e*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \qquad\qquad \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n\right).$$

Questi limiti possono essere finiti o infiniti. Come conseguenza, per una successione monotona:

$$\{a_n\} \text{ è convergente } \Leftrightarrow \{a_n\} \text{ è limitata}$$

Questo teorema è **MOLTO IMPORTANTE** in quanto è l'unico teorema (tra quelli che vedremo) che garantisce che una successione **ha limite** senza dover dire esplicitamente chi é questo limite. **GIOCA** l'assioma di continuità.

Dim. Caso $\{a_n\}$ crescente. Poniamo

$$\ell := \sup_{n\geq 0} a_n$$ (ℓ esiste sempre, per l'assioma di continuità !!)

Voglio verificare che $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Distinguo due casi

$\ell \in \mathbb{R}$. In questo caso, per le proprietà del sup, :

(a) $\ell \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ℓ è maggiorante per a_n)

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad a_{n_0} > \ell - \varepsilon$ ($\ell-\varepsilon$ non è maggiorante)

Fino a qui ho usato la definizione di estremo superiore.
Ora uso la crescenza di $\{a_n\}$. Se prendo $n \geq n_0$

$$\underbrace{\ell-\varepsilon < a_{n_0}}_{(b)} \underbrace{\leq a_n}_{\text{perché } \{a_n\} \text{ è crescente}} \underbrace{\leq \ell}_{(a)} < \ell+\varepsilon$$

Dunque, dato $\varepsilon>0$, esiste n_0 tale che $\forall n \geq n_0 \quad \ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon$!!

. Ho verificato dunque che $a_n \to \ell$.

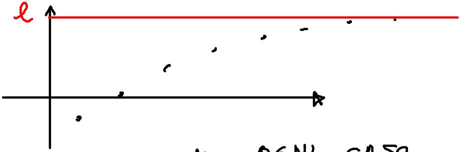
$\underline{\ell = +\infty}$ Quindi $\{a_n\}$ non è limitata superiormente $\Longleftrightarrow$

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 : \quad a_{n_0} \geq c$$

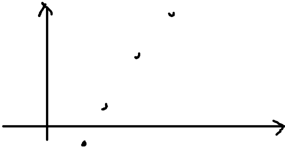
Dato che $\{a_n\}$ cresce, se $n \geq n_0$ $\quad a_n \geq a_{n_0} \geq c$.

Dunque, $\forall c \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq c$

HO VERIFICATO CHE $a_n \to +\infty$



OPPURE



IN OGNI CASO AMMETTE LIMITE.

· Paliamo del numero e.

Poniamo $\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$a_1 = 2$, $a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$; $a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$; . . .

Dico che $\{a_n\}$ è crescente. Cioè dico che

$a_n \geq a_{n-1}$ per $n \geq 2$ (è lo stesso che $a_{n+1} \geq a_n$ se $n \geq 1$)

$\Updownarrow$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \quad \text{per } n \geq 2$$

$\Updownarrow$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1} \quad \text{per } n \geq 2$$

$\Updownarrow$

$$\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} \quad \text{per } n \geq 2$$

$$\Updownarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{n-1}{n} \qquad \text{per } n \geq 2$$

$$\Updownarrow \quad \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n} \qquad \Leftarrow \text{ Bernoulli, infatti}$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{n}{n^2} = 1-\frac{1}{n} \qquad \text{VERA}$$

Quindi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ CRESCE AL CRESCERE DI n

Per il teorema di prima posso definire $e := \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Però e potrebbe essere $+\infty$ ☹. Devo dimostrare che $e < +\infty$!! Per questo introduco

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \left(b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n\right)$$

• Dico che b_n è decrescente: $b_n \le b_{n-1}$ $\forall n \ge 2 \iff$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \le \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} \ \forall n\ge 2 \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \le \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} \ \forall n \ge 2$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right) \le \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} \ \forall n \ge 2 \iff 1+\frac{1}{n} \le \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n} \ \forall n \ge 2$$

$$\iff 1+\frac{1}{n} \le \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n} \Longleftarrow$$ VERA PER Bernoulli, infatti:

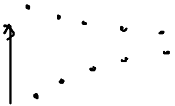
$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n} \ge 1+\frac{n}{n^2-1} \ge 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$$ VIENE!

Riassumendo

$$2 = a_1 \le a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \le b_1 = 4$$

IN REALTÀ: se $n \ge m$ due interi

• $a_n \le b_n \le b_m$



· Stesso discorso se $n \le m$ o $a_n \le a_m \le b_m$ $\Rightarrow \forall n, m \quad a_n \le b_m$

$$\Rightarrow \boxed{\sup a_n \le \inf b_m} \text{ da cui}$$

$$2 \le \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{= e} \le \underbrace{\lim_{n\to\infty} b_n}_{= e'} \le 4$$ (in particolare sono finiti, $e \in \mathbb{R}$)

Ma dato che $b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \xRightarrow{\text{(passo al limite)}} e' = e \cdot 1$

ANCHE $b_n \to e$ $\quad a_n \to e^-$, $b_n \to e^+$

a_n è un'approssimazione per difetto di e

b_n è un'approssimazione per eccesso di e

Per esempio se $n = 4$

$$2{,}44 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 \le a_4 < e < b_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^5 = 3{,}05$$

Dal punto di vista numerico la convergenza di a_n e b_n a e È LENTA.

. Il numero e entra in molti problemi.

INTERESSE COMPOSTO   Somma S nel tempo T

matura un interesse i. $\underset{t=0}{S} \longrightarrow \underset{t=T}{S + i \cdot S}$

$\underset{t=2T}{S + iS + i(S+iS)}$ e così via... Scriviamo meglio:

$t=0$ S, $t=T$ $(1+i)S$, $t=2T$ $(1+i)^2 S$ ...

dopo n passi $(1+i)^n S$

Supponiamo ora che l'interesse maturi dopo $\frac{T}{2}$

All'istante $t=T$ matura $S\left(1+\frac{i}{2}\right)^2$.

Se divido T in k sottointervalli — ognuno dei quali mi dà un interesse di $\frac{i}{k}$, per $t=T$ ricavo $\boxed{S\left(1+\frac{i}{k}\right)^k}$

(capitalizzazione a intervalli $\frac{T}{k}$)   Nota è meglio $S\left(1+\frac{i}{k}\right)^k$ che $S(1+i)$

· Se mando k a $+\infty$ (capitalizzazione istantanea) trovo

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{i}{k}\right)^k = \lim_{k\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k/i}\right)^{\frac{k}{i}}\right]^i \underset{??}{=} \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^i$$

$= e^i$ (sto sottintendendo un cambio di variabile $n=\frac{k}{i}$ nel limite — lo vedremo più avanti)

$\Rightarrow$ Con una capitalizzazione istantanea, il capitale al tempo T è $S\cdot e^i > S\left(1+\frac{i}{k}\right)^k > S(1+i)$

Risultati utili

Teorema (Criterio della radice per i limiti)

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri non negativi: $a_n \geq 0$ per ogni n (basterebbe definitivamente). Supponiamo che esista:

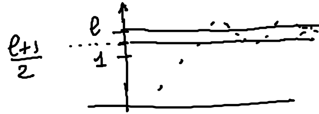
$$l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \qquad \textit{Allora:}$$

- *se $l < 1$, si ha $a_n \to 0$,*
- *se $l > 1$, si ha $a_n \to +\infty$.*

DIM

NON DICIAMO NULLA SE $\ell = 1$ (perché non si può dire nulla)

Dim · Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell > 1$. Allora definitivamente $\sqrt[n]{a_n} > \frac{\ell+1}{2}$



(perché $\frac{\ell+1}{2} < \ell$)

$\iff$ definitivamente $a_n \geq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$;

- Dato che $\left(\frac{\ell+1}{2}\right) > 1 \Rightarrow \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n \to +\infty \Rightarrow a_n \to +\infty$

Se invece $\sqrt[n]{a_n} \to \ell < 1 \Rightarrow$ definitivamente $\sqrt[n]{a_n} < \frac{\ell+1}{2}$

$\left(\ell < \frac{\ell+1}{2} < 1\right)$. Dunque $0 \leq a_n \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ (per ip. segno)

Dato che $\frac{1+\ell}{2} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$ (confronto)

Teorema (Criterio del rapporto per i limiti)

Sia $\{a_n\}$ *una successione di numeri positivi:* $a_n > 0$ *per ogni* n *(basterebbe definitivamente). Supponiamo che esista:*

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \qquad \textit{Allora:}$$

- *se* $l < 1$*, si ha* $a_n \to 0$*,*
- *se* $l > 1$*, si ha* $a_n \to +\infty$*.*

SEGUE DAL TEOREMA DI CESARO - vedi prossimo lucido

Un teorema di Cesaro

Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi: $a_n > 0$ per ogni n (basterebbe definitivamente). Supponiamo che esista:

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Allora:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

caso $l \in \mathbb{R}$ – tralasciamo il caso $l = +\infty$.

DIM

Suppongo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$. Allora fissato $\varepsilon > 0$

definitivamente $\quad l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$

$\iff$ definitivamente $a_n(\ell-\varepsilon) < a_{n+1} < (\ell+\varepsilon)a_n$

cioè esiste n_0 : $\forall n \geq n_0$ $(\ell-\varepsilon)a_n < a_{n+1} < (\ell+\varepsilon)a_n$

IN PARTICOLARE

$n = n_0 \Rightarrow$ $(\ell-\varepsilon)a_{n_0} < a_{n_0+1} < (\ell+\varepsilon)a_{n_0}$

$n = n_0+1 \Rightarrow$ $a_{n_0}(\ell-\varepsilon)^2 < (\ell-\varepsilon)a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < a_{n_0+1}(\ell+\varepsilon) < a_{n_0}(\ell+\varepsilon)^2$

$n = n_0+2 \Rightarrow$ $(\ell-\varepsilon)^3 a_{n_0} < (\ell-\varepsilon)a_{n_0+2} < a_{n_0+3} < a_{n_0+2}(\ell+\varepsilon) < a_{n_0}(\ell+\varepsilon)^3$

$n = n_0+k$ $\boxed{a_{n_0}(\ell-\varepsilon)^k < a_{n_0+k} < a_{n_0}(\ell+\varepsilon)^k}$

$n_0 + k := n$
$\Downarrow$
$k = n - n_0$

$$a_{n_0}(\ell-\varepsilon)^{n-n_0} < a_n < a_{n_0}(\ell+\varepsilon)^{n-n_0} \quad \forall n \geq n_0$$

faccio la radice n-esima: $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell-\varepsilon)^{n_0}}}(\ell-\varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}}(\ell+\varepsilon)}$

per $n \geq n_0$

Noto che $\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell-\varepsilon)^{n_0}}}(\ell-\varepsilon) \to \ell-\varepsilon$ / $\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}}(\ell+\varepsilon) \to \ell+\varepsilon$

(perché, come abbiamo visto, $\sqrt[n]{A} \to 1$ se $0 < A < +\infty$)

$\Rightarrow$ per n abbastanza grande

$$\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell-\varepsilon)^{n_0}}}\,(\ell-\varepsilon) > \ell - 2\varepsilon \quad \Bigg| \quad \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}}\,(\ell+\varepsilon) < \ell + 2\varepsilon$$

da cui, per n abbastanza grande

$$\ell - 2\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + 2\varepsilon$$

HO VERIFICATO ALLORA CHE $\boxed{\sqrt[n]{a_n} \to \ell}$

(il fatto che ci sia 2ε invece di ε non conta – potevo partire da $\frac{\varepsilon}{2}$)

Conseguenze.

- $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

- $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$$ qualunque sia k, infatti posso fare in due modi, o

$$\sqrt[n]{n^k} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^k \to 1^k = 1$$

oppure applico Cesaro

$$\frac{(n+1)^k}{n^k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \to 1$$

Si tratta di forme di tipo esponenziale $n^{\frac{1}{n}}$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^5} = +\infty \quad (\text{VINCE } 3^n)$$

Dato che $\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^5}} = \frac{3}{(\sqrt[n]{n})^5} \to 3 > 1 \Rightarrow \frac{3^n}{n^5} \to +\infty$

· In generale (VINCE $\underline{\text{L'ESPONENZIALE}}$)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n}{n^k} = +\infty \quad \text{se } A > 1, \text{ qualunque } k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to+\infty} A^n \cdot n^k = 0 \quad \text{se } 0 < A < 1, \text{ qualunque } k \in \mathbb{N}$$

(sempre usando la $\sqrt[n]{\ }$)

· $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ $\underline{\text{VINCE } n!}$. Posto $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$

faccio $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \dfrac{3^n}{n!} = \dfrac{3^{n+1}\, n!}{3^n (n+1)!} = \dfrac{3}{n+1} \to 0$

(NOTA CHE $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$) $\Rightarrow a_n \to 0$

IN GENERALE $\dfrac{A^n}{n!} \to 0 \quad \forall A > 0$ (stesso procedimento)

· $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$ VINCE n^n (ESERCIZIO!)