Analisi Matematica 1
Sesta lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

23 ottobre 2009

Classificazione delle successioni in base al limite

In base alla nozione ora introdotta una successione può avere o anche non avere limite. Nel primo caso diremo che $\{a_n\}$ è *regolare*, mentre nel secondo che $\{a_n\}$ è *irregolare*. Tutto questo indipendentemente dal fatto che il limite sia finito o infinito. Quindi

$$\{a_n\} \text{ è regolare } \Leftrightarrow \exists l \in \overline{\mathbb{R}} : a_n \to l.$$

Tra le successioni regolari distinguiamo poi quello aventi limite finito, che sono dette *convergenti* da quelle tendenti a più/meno infinito che si chiameranno *divergenti* (positivamente/negativamente).

$$\{a_n\} \begin{cases} \text{ha limite} & \to \begin{cases} \text{ha limite finito} & \to \text{convergente} \\ \text{ha limite infinito} & \to \text{divergente} \end{cases} \\ \text{non ha limite} & \to \text{irregolare} \end{cases}$$

Dato che le successioni sono particolari funzioni sappiamo cosa significa dire che una successione $\{a_n\}$ è limitata:

- $\{a_n\}$ è superiormente limitata se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- $\{a_n\}$ è inferiormente limitata se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- $\{a_n\}$ limitata se $\exists M, m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se una successione $\{a_n\}$ è convergente allora è limitata.

Dim. So che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ∴ Prendo $\varepsilon = 1$: $\exists n_0$ tale che $\forall n \geq n_0$

$\ell - 1 < a_n < \ell + 1$ (da n_0 in poi $\{a_n\}$ è limitata)

D'altra parte gli n minori di n_0 sono un numero finito. Se

$M = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}, \ell+1)$; $m = \min(a_0, a_1 \ldots, a_{n_0}, \ell - 1)$

$\Rightarrow \quad m \leq a_n \leq M \quad \forall n$

Esempi (1) $a_n = n$ è una successione divergente a $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (n \to +\infty)$$

Infatti dato $c \in \mathbb{R}$ se prendo $n \geq c$ $(n_0 = [c]+1)$

si ha $a_n = n \geq c$

(2) $a_n = \frac{1}{n}$, allora $a_n \to 0$ $\left(\text{cioè } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\right)$

Infatti dato $\varepsilon > 0$ posso prendere $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ $\left(\text{per es. } n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right)$

Ne segue che, se $n \geq n_0$ $0 < a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$

Dunque $\forall \varepsilon > 0$ ho trovato $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, se $n \geq n_0$

$$0 - \varepsilon < a_n < 0 + \varepsilon$$

DUNQUE HO VERIFICATO CHE $\frac{1}{n} \to 0$

Nota non abbiamo definito "limite infinito" (senza segno)

A volte si dice che $a_n \to \infty$ per indicare che $|a_n| \to \infty$

Osservazione

Notiamo che, dato $l \in \mathbb{R}$, $a_n \to l \Leftrightarrow |a_n - l| \to 0 \Leftrightarrow (a_n - l) \to 0$ in particolare $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$.

Osservazione

Nella dimostrazione dell'unicità del limite abbiamo usato il fatto seguente:

$$\mathscr{P}(n) \text{ e } \mathscr{Q}(n) \text{ definitivamente vere} \Rightarrow \mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{Q}(n) \text{ definitivamente vera}$$

che si verifica facilmente (come abbiamo già fatto)

COMMENTI

La definizione di limite fornisce un importante strumento concettuale sia nell'ambito dell'*approssimazione* sia più in generale nella descrizione di *fenomeni continui*.
Va notato che nella definizione di limite si dice che la successione si avvicina, con approssimazione arbitraria al suo limite, ma **non si dice** *quanto ci vuole* perchè ciò si realizzi. Detto in maniera formale per ogni approssimazione $\varepsilon > 0$ (arbitraria) *prima o poi*, cioè per tutti gli n maggiori o eguali di un opportuno n_1, la successione sarà vicina al suo limite a meno di ε – non si dice però come si trovi il'intero n_1 a partire da ε.
Vedremo più avanti come, in varie questioni, il solo limite non sarà sufficiente, ma servirà anche valutare la *velocità di convergenza* della successione verso il suo limite.
La situazione tipica in cui servirà questo approccio è il caso dei limiti di *forme indeterminate*.

COMMENTI

Come succede spesso (in matematica) le definizioni non si usano quasi mai direttamente. Quello che si fa normalmente è

- studiare alcuni casi semplici (limiti notevoli) a partire dalla definizione;
- ricavare una serie di proprietà generali della definizione, in modo da elaborare un "*calcolo*".

In questo modo di solito il calcolo di un limite si riduce, mediante i teoremi su somme/prodotti ecc... (usando opportune manipolazioni algebriche) ai limiti di alcuni "pezzi elementari"

Si può già mettere in evidenza che questo modo di procedere sarà lo stesso con le derivate e con gli integrali.

Cominciamo allora ad analizzare le proprietà della nozione di limite.

Limiti e ordine

Supponiamo che $\{a_n\}$ sia una successione **avente limite** l, con $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. (**monotonia del limite**)
   Se frequentemente [1] $a_n \geq 0$, allora $l \geq 0$.
2. (**permanenza del segno**)
   Se $l > 0$, allora definitivamente $a_n > 0$.
3. (**confronto** - due carabinieri)
   Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sono tre successioni tali che

   $$a_n \to l,\ c_n \to l, \quad \text{definitivamente} \boxed{a_n \leq b_n \leq c_n}$$

   allora $b_n \to l$.

   Inoltre se $l = +\infty$ (risp. $l = -\infty$) allora basta la diseguaglianza $a_n \leq b_n$ (basta $b_n \leq c_n$).

[1] a maggior ragione se definitivamente $a_n \geq 0$

Limiti e operazioni

Supponiamo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano due successioni **convergenti** e che $\boxed{a_n \to l_1, \quad b_n \to l_2}$. ALLORA

1. $a_n + b_n \to l_1 + l_2$.
2. $a_n \cdot b_n \to l_1 l_2$.
3. Se $l_1 \neq 0$ $\dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{l_1}$.[2] ($\frac{1}{a_n}$ ha senso x $a_n \neq 0$, $a_n \to l \neq 0$, $\frac{1}{a_n}$ è def. per n grande)
4. Se $a_n \to 0$ e $\{b_n\}$ è limitata, allora $a_n b_n \to 0$.

Osservazione

Da quanto sopra si ottiene che:

- $a_n - b_n \to l_1 - l_2$ (scrivendo $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n$);
- se $a_n \leq b_n$ frequentemente, allora $l_1 \leq l_2$ (monotonia);
- se $l_1 < l_2$, allora definitivamente $a_n < b_n$ (perm. diseg.).

[2] Si noti che $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ è definitivamente ben definita, per la permanenza del segno

Dim. del teorema della somma (gli altri li diamo per buoni)

So che $a_n \to \ell_1$ $(\in \mathbb{R})$, $b_n \to \ell_2$ $(\in \mathbb{R})$.

Quindi dato $\varepsilon > 0$ posso dire che

$$\ell_1 - \varepsilon/2 < a_n < \ell_1 + \varepsilon/2 \quad \text{definitivamente}$$

$$\ell_2 - \varepsilon/2 < b_n < \ell_2 + \varepsilon/2 \quad \text{definitivamente}$$

SONO DEFIN. VERE ENTRAMBE

(anche $\frac{\varepsilon}{2}$ è un numero >0, che posso usare nella def. di limite)

se sommo le due righe sopra trovo

$$\ell_1 + \ell_2 - \varepsilon < a_n + b_n < \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon \quad \text{definitivam.}$$

Dato che lo posso fare per ogni $\varepsilon > 0$ ho verificato che

$$a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2$$

ok

Operazioni con i limiti infiniti

Supponiamo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano due successioni, che $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ e che

$$a_n \to l_1, \quad b_n \to l_2.$$

Allora

1. Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 > -\infty$ allora $a_n + b_n \to +\infty$
2. Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 < +\infty$ allora $a_n + b_n \to -\infty$
3. Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 > 0$ allora $a_n b_n \to +\infty$
4. Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 < 0$ allora $a_n b_n \to -\infty$
5. Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 > 0$ allora $a_n b_n \to -\infty$
6. Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 < 0$ allora $a_n b_n \to +\infty$

(le accettiamo senza dimostrazione)

Possiamo allora convenire che:

$$
\begin{array}{llll}
l+\infty=+\infty & \text{se } l>-\infty & l-\infty=\infty & \text{se } l<+\infty \\
l\cdot(+\infty)=+\infty & \text{se } l>0 & l\cdot(+\infty)=-\infty & \text{se } l<0 \\
l\cdot(-\infty)=-\infty & \text{se } l>0 & l\cdot(-\infty)=+\infty & \text{se } l<0
\end{array}
$$

mentre **NON** definiamo

$$\boxed{+\infty-\infty, \quad 0\cdot(+\infty), \quad 0\cdot(-\infty)} \qquad (*)$$

NON SONO DEFINITI

(e i viceversa). Con questa convenzione possiamo dire che

$$a_n \to l_1,\ b_n \to l_2 \Rightarrow a_n+b_n \to \underline{l_1+l_2}, \quad a_nb_n \to \underline{l_1l_2}$$

se hanno senso

PURCHÈ le operazioni tra l_1 e l_2 siano definite. I teoremi non dicono nulla invece se nel risultato si presenta una delle forme $(*)$.

Se il limite di una somma o di un prodotto porta a un'espressione tra quelle in $(*)$, si dice che su ha a che fare con una **forma indeterminata**.

ATTENZIONE

- Il fatto che un limite si presenti in una forma indeterminata **non vuol dire** che il limite sia indefinito. Vuole solo dire che il risultato di tale limite non si può ricavare in *generale*, conoscendo solo i due limiti delle successioni di partenza. Serviranno altre informazioni, da ricavare caso per caso.
- **È sbagliato** usare espressioni del tipo

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=+\infty-\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty}a_nb_n=0\cdot+\infty$$

(visto che i simboli scritti a destra non significano nulla). Bisognerebbe scrivere

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty \text{ e } \lim_{n\to-\infty}b_n=-\infty, \quad \lim_{n\to+\infty}a_n=0 \text{ e } \lim_{n\to-\infty}b_n=+\infty$$

- Indeterminate sono **le forme** a_n+b_n o a_nb_n (nei casi descritti sopra), non i loro limiti. $\boxed{\lim \frac{n}{n}=1 \textbf{ NON } \frac{+\infty}{+\infty}}$.

Forme indeterminate:esempi

Dal fatto che $n \to +\infty$ si ricava (teorema sul prodotto)

$$n^k \to +\infty \text{ per ogni } k \geq 1 \text{ intero.}$$

Per i teoremi sulle somme $n^k - 1 \to +\infty$ e (moltiplicando per $-1 \neq 0$) $-n^k + 1 \to -\infty$. Allora:

- $a_n := n^2 \to +\infty,\ b_n := -n^2 + 1 \to -\infty,$ allora $\boxed{a_n + b_n = 1 \to 1}$
- $a_n := n \to +\infty,\ b_n := -n^2 + 1 \to -\infty,$ allora $\boxed{a_n + b_n \to -\infty}$

  infatti $$n - n^2 + 1 = n^2 \underbrace{\left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n^2}\right)}_{\to(0-1+0)} \to +\infty(-1) = -\infty$$
- $a_n := n^3 \to +\infty,\ b_n := -n^2 + 1 \to -\infty,$ allora $\boxed{a_n + b_n \to +\infty}$

  infatti $$n3 - n^2 + 1 = n^3 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}_{\to(1-0+0)} \to +\infty(1) = +\infty$$

Forme indeterminate:esempi

Dunque a seconda dei casi “$+\infty - \infty = 1/-\infty/+\infty$”.
Stesso discorso per le forme tipo prodotto:

- $a_n := n \longrightarrow +\infty,\ b_n : \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0,$ allora $\boxed{a_n b_n = 1 \longrightarrow 1}$
- $a_n := n \longrightarrow +\infty,\ b_n := \dfrac{1}{n^2} \longrightarrow 0,$ allora $\boxed{a_n b_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0}$
- $a_n := n^2 \longrightarrow +\infty,\ b_n := \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0,$ allora $\boxed{a_n b_n = n \longrightarrow +\infty}$

e quindi, a seconda dei casi $+\infty \cdot 0 = 1/0/+\infty$ (ma può fare qualsiasi cosa e anche non esistere).

Limiti per eccesso/ per difetto

Definizione

Sia $\{a_n\}$ una successione e l un numero reale. Diciamo che che $\{a_n\}$ **tende a l per eccesso** (risp. per difetto), o anche tende a l **più** (risp. l meno) e scriviamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l^+ \qquad \text{o anche} \qquad a_n \to l^+$$

per es.

$\frac{1}{n} \to 0^+$

$\sqrt[n]{2} \to 1^+$

$$\left(\text{risp.} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = l^+ \qquad \text{o anche} \qquad a_n \to l^+\right)$$

SE

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \qquad \text{e definitivamente } a_n > l$$

$$\left(\text{risp.} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = l \qquad \text{e definitivamente } a_n < l\right)$$

NOTA: Nel libro la definizione è leggermente più debole ($a_n \to l^+$ se $a_n \to l$ e definitivamente $a_n \geq l$).

Operazioni con i limiti infiniti - continuazione

Sia $\{a_n\}$ una successione.

1. Se $a_n \to +\infty$, allora $\dfrac{1}{a_n} \to 0^+$ (in particolare $\frac{1}{a_n} \to 0$)
2. Se $a_n \to -\infty$, allora $\dfrac{1}{a_n} \to 0^-$ " "
3. Se $a_n \to 0^+$, allora $\dfrac{1}{a_n} \to +\infty$ (NOTA CHE, se $a_n \to 0^+/0^-$ $\frac{1}{a_n}$ è definita per n grande)
4. Se $a_n \to 0^-$, allora $\dfrac{1}{a_n} \to -\infty$
5. $|a_n| \to +\infty$, allora $\dfrac{1}{a_n} \to 0$
6. Se $a_n \to 0$ e definitivamente $a_n \neq 0$, allora $\dfrac{1}{|a_n|} \to +\infty$

· Esempio $\quad a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$

Verifichiamo (a partire dalla definizione) che $a_n \to 1$

Devo quindi far vedere che, dato $\varepsilon > 0$, definitivamente

$$1-\varepsilon < a_n < 1+\varepsilon \qquad (*)$$

La dis. di sinistra è vera $\forall n$, dato che

$$n+2 > n+1 > 0 \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} > 1 > 1-\varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

Vediamo per quali n vale la dis. di destra. Sia $\varepsilon > 0$

$$\frac{n+2}{n+1} < 1+\varepsilon \iff n+2 < (1+\varepsilon)(n+1)$$

$$(0 < -n-2+(1+\varepsilon)n+1+\varepsilon)$$

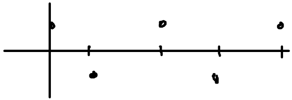
$$\iff 1-\varepsilon < \varepsilon n \iff n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \text{ è un numero reale}$$

Sicuramente trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ e quindi

se $n \geq n_0$ vale la $(*)$. Ho VERIFICATO CHE $a_n \to 1$

· <u>Esempio</u> $\quad a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$

$a_0 = 1, \ a_1 = -1, \ a_2 = 1, \ a_3 = -1, \ \dots$



. $\{a_n\}$ <u>NON HA LIMITE</u>

Infatti supponiamo che esista $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \to \ell$

(a rigore dovrei anche ammettere $\ell = \pm\infty$, ma ...)

Prendo $\varepsilon = 1/3$ .. Per def di limite esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < 1/3 \qquad \forall n \geq n_0$$

Sia $n_1 > n_0$ PARI, $n_1 + 1 > n_0$ DISPARI

$$\ell - \frac{1}{3} < \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{a_{n_1}} < \ell + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3} < \ell$$

IMPOSSIBILE

$$\ell - \frac{1}{3} < \underset{\substack{\shortparallel \\ -1}}{a_{n_1+1}} < \ell + \frac{1}{3} \qquad \ell < -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

. È anche ovvio che non può essere $a_n \to +\infty$ dato che per nessun n $a_n \geq 2$ — QUINDI LA VERIFICA È COMPLETA

ES. $a_n = \sqrt[n]{2}$. Vediamo che $a_n \to 1$

Devo verificare che $\forall \varepsilon > 0$ definitivamente

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{2} < 1 + \varepsilon \quad (*)$$

La dis. di sinistra è vera per ogni n $\left(2 > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{2} > 1 > 1 - \varepsilon \right)$

Cerchiamo di verificare la dis. di destra. Dato $\varepsilon > 0$

$$\sqrt[n]{2} < 1 + \varepsilon \iff 2 < (1 + \varepsilon)^n$$

Dato che $(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$, mi basta dim. che

$$1 + n\varepsilon > 2 \quad \text{definitivamente}$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

CHE È VERA DEFINITIVAMENTE (se $n \geq n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$)

DUNQUE $(*)$ $\overset{\forall \varepsilon > 0}{\vee}$ È definitivamente vero $\Rightarrow$ $\boxed{a_n \to 1}$

· Nello stesso identico modo si verifica che

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \qquad \forall a > 0$$

(se $a > 1$ è lo stesso che per $a = 2$ — se $0 < a < 1$ bisogna lavorare nella dis. di Bernoulli).

Comunque se $0 < a < 1$ il risultato si può dedurre dal caso $a > 1$ passando al reciproco:

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to \frac{1}{1} = 1 \qquad \left(\frac{1}{a} > 1\right)$$

· Esempi

$$\frac{n^2+1}{n^3-n+4} = a_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = ??$$

Metto in evidenza, sia a num. che a den., il termine di grado massimo

$$a_n = \frac{n^2}{n^3}\,\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0}\left[\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\underbrace{1}_{\downarrow\,1}-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\downarrow\,0}+\underbrace{\frac{4}{n^3}}_{\downarrow\,0}}\right] \to 0$$

NOTO CHE $n\to+\infty$, $n^2 = n\cdot n \to +\infty$, $\frac{1}{n^2}\to 0\ (0^+)$

Analogamente $n^3 \to +\infty$, $\frac{4}{n^3} \to 0\ (0^+)$

Dunque
$$\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^3}} \to \frac{1+0}{1-0+0} = 1 \Rightarrow \text{LIM} = 0$$

. IN GENERALE

$$Q_n = \frac{A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \dots + A_0}{B_h n^h + B_{h-1} n^{h-1} + \dots + B_0}$$

(rapporto tra due polinomi)

$k \geq 0, \; h \geq 0$

$A_k \neq 0 \quad B_h \neq 0$

Posso scrivere

$$Q_n = n^{k-h} \frac{A_k + \overbrace{\frac{A_{k-1}}{n}}^{\to 0} + \dots + \overbrace{\frac{A_0}{n^k}}^{\to 0}}{B_h + \underbrace{\frac{B_{h-1}}{n}}_{\to 0} + \dots + \underbrace{\frac{B_0}{n^h}}_{\to 0}}$$

(per $n \to +\infty$)

$$\lim_{n \to +\infty} Q_n = \begin{cases} k > h & +\infty / -\infty \text{ a seconda del segno di } A_k/B_h \\ k = h & \dfrac{A_k}{B_h} \quad \text{(grado eguale)} \\ h > k & 0 \quad (0^+/0^- \text{ a seconda del segno di } A_k/B_h) \end{cases}$$

- Ho trovato un modo per risolvere <u>alcune</u> forme indeterminate

Se prendo $\frac{P(n)}{Q(n)}$ il limite è lo stesso se prendessi il rapporto $\frac{a_k n^k}{b_h n^h}$

$$\left(\begin{array}{l} P(n) = a_k n^k + \text{ termini di grado minore} \\ Q(n) = b_h n^h + \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{array} \right.$$

<u>IN QUESTO CASO</u> posso trascurare (ai fini del limite) i termini di grado più basso

$$n^3 - 4n^2$$

<u>VINCE n^3</u>

$$= n^3\left(1 - \frac{4}{n}\right) \longrightarrow +\infty \cdot (1-0) = +\infty$$

· Altro esempio (IMPORTANTE)

$a_n = 2^n$. Dico che $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

Devo usare la definizione. Devo far vedere che, presa $c \in \mathbb{R}$

$$2^n \geq c \quad \text{definitivamente}.$$

Dato che $2^n = (1+1)^n \overset{\text{(Bernoulli con } a=1)}{\geq} 1+n$, basta far vedere che

$$1+n \geq c \quad \text{definitivamente}.$$

e questo è vero ($n \geq c-1$) FINE

Avrei anche potuto usare un teorema di confronto:

Dato che $2^n \geq 1+n$, e $1+n \to +\infty \Rightarrow$

$$2^n \to +\infty$$

· Lo stesso si può fare per A^n quando $A > 1$:

$$A^n = (1 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{maggiore di zero}}}{(A-1)})^n \geq 1 + (A-1)n \to +\infty$$

$$\left(\begin{array}{l} 2^n \to +\infty \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \end{array} \right)$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} A^n = +\infty \quad \text{se} \quad A > 1} \; \circledast$$

Se invece $0 < A < 1$ osservo che

$$A^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{+\infty} = 0^+ \Rightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} A^n = 0 \quad \text{se} \quad 0 < A < 1}$$

$$\left(\frac{1}{A} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{A}\right)^n \to +\infty \text{ per } \circledast \right)$$

· Esempio (da ricordare)

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Uso la definizione. Dato $\varepsilon > 0$ devo dimostrare che

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

La dis. di sinistra è sempre vera perché $\sqrt[n]{n} \geq 1$ $\forall n$.

La dis. destra equivale a

$$n \leq (1 + \varepsilon)^n \quad \text{definitivamente} \quad (*)$$

[Uso la formula: $(1+\varepsilon)^n = 1 + \varepsilon n + \binom{n}{2} \varepsilon^2 +$ termini positivi $\geq$ $1 + \varepsilon n + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$.]

A causa della formula mi basta verificare

$$1 + \varepsilon n + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 \geq n \quad \text{definitivamente} \quad (**) \; (*)$$

· Cioè

$$\frac{M^2}{2}\varepsilon^2 + \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - 1\right)n + 1 \geq 0 \qquad \text{definitivamente}$$

Questa ultima disuguaglianza è sicuramente vera per n grande dato che

$$\frac{M^2}{2}\varepsilon^2 + \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - 1\right)n + 1 \longrightarrow +\infty$$

(la prossima volta faremo una dim. più semplice)