Analisi Matematica 1
Quinta lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

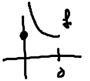
22 ottobre 2009

Proposizione	Vera	Falsa	
$A \subset [0,2]$ implica $\exists\ \sup A$	X		(e tale sup $\in \mathbb{R}$)
$A \subset [0,2]$ implica $\exists\ \max A$		X	$A = [0,1[$
$A \subset [0,2[$ implica $\exists\ \sup A$	X		(ed è finito!)
$A \subset [0,2[$ implica ~$(\exists\ \max A)$		X	per es $A = [0,1]$
$\sup A = 3$ implica $3 \in A$		X	$A = [0,3[$
$\sup A = 3$ implica $3 \notin A$		X	$A = [0,3]$
$(\sup A = 3) \wedge (3 \in A)$ implica $3 = \max A$	X		

"se e solo se"

•

Proposizione	Vera	Falsa
$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ implica $\sup\limits_{[0,1]} f \le 1$	$\square$	$\boxtimes$
$f:[0,1]\to]-1,1[$ implica f limitata	$\boxtimes$	$\square$
$f:[0,1]\to]0,2[$ implica $\sup\limits_{[0,1]} f \le 2$	$\boxtimes$	$\square$
$f:[0,1]\to]0,2[$ implica $\sup\limits_{[0,1]} f = 2$	$\square$	$\boxtimes$
$f:[0,1]\to]0,2[$ implica che non esiste $\max\limits_{[0,1]} f$	$\square$	$\boxtimes$



$\sup\limits_{[0,1]} f = +\infty$

$-1 < f(x) < 1$

può anche essere < 2
per es. $f(x) = 1$

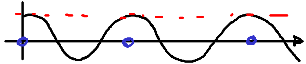
$\sup\{y : (\exists x \in \mathbb{R} : y = \cos(x))\} =$	1
$\sup\{x : (\exists y \in \mathbb{R} : x = \cos(y))\} =$	1
$\sup\{x : \cos(x) = 1\} =$ $\sup\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$+\infty$
$\sup\{x : (\exists y \in \mathbb{R} : \cos(x) = \overset{x\ \ \mathbb{R}}{y} + 1)\} =$	$+\infty$
$\inf\{y : (\exists x \in [0,2[: y = -x^2 + \overset{=\,]0,4]}{4})\} =$	0
$\inf\{x : 4x - 2 \geq 10\} =$ $\inf [3,+\infty[$	3
$\inf\{y : \forall x \in]-1,1[\quad 1 - x^2 < y)\} =$ $[1,+\infty[$	1

$\sup_{x\in\mathbb{R}} \cos(x)$

$\sim \sup\{\cos(x),\ x\in\mathbb{R}\} = 1$

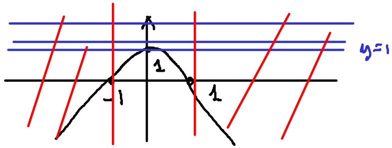
$= \sup \cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$

(lo stesso di sopra)



dato x prendo $y = \cos(x) - 1 \Rightarrow$ ogni x va bene

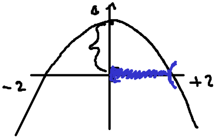
$f([0,2[)$ dove $f(x) = -x^2 + 4$



$\sup_{]-1,1[} f(x) = \max_{[-1,1]} f(x)$

dove $f(x) = 1 - x^2$

$f(x) = -x^2 + 4$

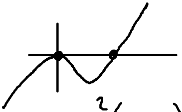


$f([0,2[) =]0,4]$

$4x - 2 \geq 10 \iff x \geq \frac{12}{4} \iff x \geq 3$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

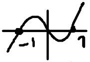
funzione	iniettiva ?	surgettiva ?
$f(x) = 2x - 5$	SI	SI
$f(x) = x^2$	NO	NO
$f(x) = x^3$	SI	SI
$f(x) = x^2 + 4x + 4$	NO	NO
$f(x) = \cos(x)$	NO	NO
$f(x) = x^3 - x^2$	NO	SI



$x^2(x-1)$

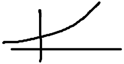
(non è proprio ovvia la surgettività)

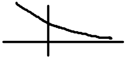
$x^3 - x = y$??



$x^3 - x = 0 \quad x = 0,\ x = \pm 1$

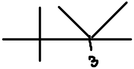
funzione	iniettiva ?	surgettiva ?
$f(x) = x^3 - x$	NO	SI
$f(x) = 2^x$	SI	NO
$f(x) = 3^{-x}$	SI	NO
$f(x) = 2^{1+x^2}$	NO	NO
$f(x) = \ln(1+x^2)$	NO	NO
$f(x) = \sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$	NO	NO
$f(x) = \lvert x-3 \rvert$	NO	NO
$f(x) = x^{2000} + 2000$	NO	NO





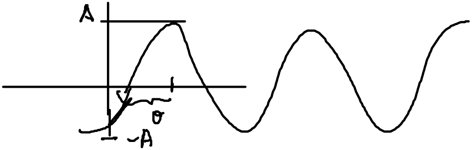
$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$

$\otimes$



⊛ Un'espressione del tipo $a\cos(x) + b\sin(x) =$

si può sempre mettere nella forma $\underbrace{A}_{\text{ampiezza}}\cos(x - \underbrace{\theta}_{\text{fase}})$



Dim.

$$a\cos(x) + b\sin(x) = A\cos(x-\theta) =$$

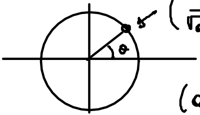
$$A\cos(x)\cos(\theta) + A\sin(x)\sin(\theta) \qquad \Leftarrow$$

$$\begin{cases} A\cos(\theta) = a \\ A\sin(\theta) = b \end{cases}$$

Allora $A^2\cos^2(\theta) + A^2\sin^2(\theta) = a^2 + b^2 \iff \boxed{A = \sqrt{a^2+b^2}}$

Rimane la condizione

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$



$\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

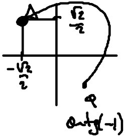
θ esiste (a meno di $2k\pi$)

• Notiamo che $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$, se $a = 0$ $\theta = \pm \pi/2$ a seconda che $b > 0$ / $b < 0$)

$$\Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{se } a > 0$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \quad \text{se } a < 0 \text{ e } b \geq 0$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi \quad \text{se } a < 0 \text{ e } b \leq 0$$



$f(x)$	A	$f(A)$	B	$f^{-1}(B)$
$2x-4$	$[0,3]$		$[0,2]$	
x^2	$[0,3]$		$[0,4]$	
x^3	$[0,3]$		$[0,27]$	
x^2+4x+4	$[-2,1]$		$[0,4]$	
$\cos(x)$	$[0,\pi]$		$[-2,2]$	
$\sin(x)$	$[0,\pi]$		$[1,2]$	
2^x	$]-\infty,0[$		$[1,+\infty[$	
$\ln(x)$	$]0,1]$		$[1,e^2]$	
$\lvert x-3\rvert$	$[2,4]$		$[0,2]$	
3^x	$\mathbb{R}$		$[1,3]$	

$\cdot \quad f(x) = x^2+4x+4) = (x+2)^2$

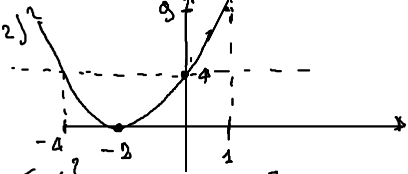
$f([-2,1]) = [0,9]$

$f^{-1}([0,4]) =$

$$\{x : 0 \le x^2+4x+4 \le 4\} = [-4,0]$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2+4x \le 0 \iff -4 \le x \le 0$$



Definizioni ricorsive

Siano dati un numero reale x_0 e una funzione $F : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (cioè $(x,n) \mapsto F(x,n)$). La scrittura:

$$\begin{cases} f(0) := x_0 \\ f(n+1) := F(f(n), n) \end{cases}$$

definisce univocamente una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Esempio

$F(x,n) = A \cdot x$

La definizione

$$\begin{cases} f(0) := 1 \\ f(n+1) := A \cdot f(n) \end{cases}$$

$A^0 = 1$

$A^{n+1} = A \cdot A^n$

individua esattamente la funzione potenza di base A: $f(n) = A^n$

Esempio

$F(x,n) = x\cdot(n+1)$

La definizione

$$\begin{cases} f(0) := 1 \\ f(n+1) := (n+1)\cdot f(n) \end{cases}$$

$f(0) = 1$
$f(1) = f(0)\cdot 1 = 1$
$f(2) = f(1)\cdot 2 = 2\cdot 1 = 2$
$f(3) = f(2)\cdot 3 = 2\cdot 3 = 6$
$\vdots$

individua esattamente la funzione fattoriale: $f(n) = n!$

Esempio

La definizione

$$\begin{cases} f(0) := 3 \\ f(n+1) := f(n)^2 - f(n) \end{cases}$$

individua univocamente una funzione, che (probailmente) non riusciamo a esprimere in termini di funzioni elementari, ma di cui, in linea di principio potremmo generare tutti i valori:

$$f(0) = 3, f(1) = 9-3 = 6, f(2) = 36-6 = 30, f(3) = 900-30 = 870, \dots$$

Esempio

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(n+1) = f(n)^2 \end{cases}$$

È DEFINITA

Proviamo a scrivere i primi valori di f

$f(0) = 2$; $f(1) = 2^2$, $f(2) = (2^2)^2 = 2^4$

$f(3) = (2^4)^2 = 2^8$; $f(4) = (2^8)^2 = 2^{16}$, $f(5) = (2^{16})^2 = 2^{32}$

Congettura: $\boxed{f(n) = 2^{(2^n)}}$, provo a verificarlo per induzione

PASSO ZERO $f(0) = 2^{2^0} = 2^1 = 2$ VERA

PASSO INDUTTIVO $f(n+1) = (f(n))^2 = \left(2^{2^n}\right)^2 = 2^{2 \cdot 2^n} =$

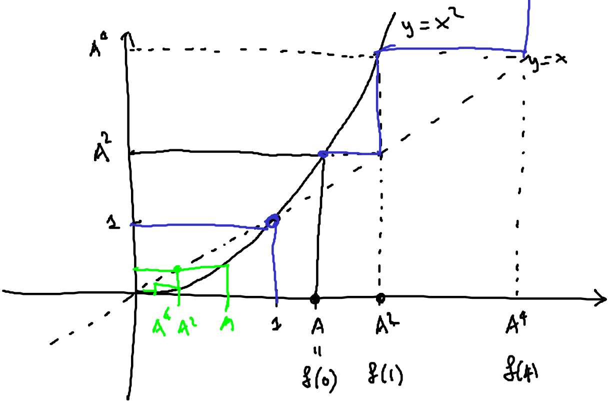
$= 2^{2^{n+1}}$ VERA

PIÙ IN GENERALE

$$\boxed{\begin{cases} f(0) = A \\ f(n) = (f(n))^2 \end{cases} \Rightarrow f(n) = A^{2^n}}$$

- $f(0) = A^{2^0} = A$ TORNA
- $f(n)^2 = \left(A^{2^n}\right)^2 = A^{2 \cdot 2^n} = A^{2^{n+1}}$ TORNA

VISUALIZZAZIONE GRAFICA DEI VALORI DI $f(n)$



Se parto da $f(0) = 1$ RIMANGO FERMI

Se $0 < A < 1$ ($\longrightarrow 0$!!)

Successioni

Definizione

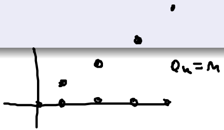
(successioni di numeri reali)

Una *successione* è una funzione $\boxed{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}}$ (cioè una funzione che a ogni numero intero n restituisce un valore reale $a(n)$).

Più in generale ammetteremo che il "punto iniziale " per cui $a(n)$ è definita non sia zero ma un intero n_0 - quindi con successione intendiamo una funzione $a : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, per un qualche $n_o \in \mathbb{N}$.

Per motivi "storici" il valore di una successione nel punto n si indica con a_n – invece che con $a(n)$ – mentre la successione stessa si indica con $\{a_n\}$ o $\{a_n\}_{n \geq n_0}$

Per esempio $\{n\}$ e $\left\{\frac{1}{n-2}\right\}_{n\geq 3}$ sono due successioni.



Consideriamo una proprietà $\mathscr{P}(n)$ definita per n intero. Diciamo che $\mathscr{P}(n)$ vale **definitivamente** se

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \mathscr{P}(n) \text{ è vera}$$

" $n^2 \geq 1000$ " VERA DEFINITIVAM. IN QUANTO È VERA SE (PER ES.) $n \geq 100$

($\mathscr{P}(n)$ vale da un certo punto in poi). Per esempio la proprietà:

" n è pari " NON È VERA DEFINITIVAMENTE

$$\mathscr{P}(n) = \text{“ } n^2 - 10n + 1 \geq 0 \text{ ”}$$

vale definitivamente in quanto

$$n^2 - 10n + 1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 5 + \sqrt{24} \Leftrightarrow n \geq 10.$$

Notiamo per esempio che la proprietà

$$\mathscr{Q}(n) = \text{“ } (-1)^n > 0 \text{ ”},$$

pur essendo vera per infiniti n (cioè per tutti gli n pari), non è definitivamente vera, in quanto è falsa per tutti gli interi dispari.

(definitivamente $\Rightarrow$ frequentemente
$\cancel{\Leftarrow}$

Una proprietà $\mathscr{P}(n)$ definita per n intero è detta valere **frequentemente**, o **per infiniti** n, se

$$\forall n_0\ \exists n \geq n_0 : \mathscr{P}(n) \text{ è vera.}$$

("n è pari" è frequentemente vero)

Quindi, come già detto, $(-1)^n$ è frequentemente > 0 (dato che comunque fissato n_0 in $\mathbb{N}$ c'è un n pari con $n \geq n_0$, e quindi $(-1)^n = 1 > 0$. Peraltro è anche vero che $(-1)^n$ è frequentemente < 0 . Notiamo che:

$$\tilde{}(\mathscr{P}(n) \text{ vale definitivamente}) \leftrightarrow \tilde{}(\exists n_0 : \forall n \geq n_0\ \mathscr{P}(n)) \leftrightarrow$$
$$\forall n_0\ \exists n \geq n_0 : \tilde{}\mathscr{P}(n) \leftrightarrow \tilde{}\mathscr{P}(n) \text{ vale frequentemente}$$

(o anche $\mathscr{P}(n)$ è frequentemente falsa). Analogamente:

$$\tilde{}(\mathscr{P}(n) \text{ vale frequentemente}) \leftrightarrow \tilde{}\mathscr{P}(n) \text{ vale definitivamente}$$

(o anche $\mathscr{P}(n)$ è definitivamente falsa).

"n pari" non è definitivamente vero $\Leftrightarrow$ "n dispari" è frequentemente vero

Limiti finiti

Definizione

Sia $\{a_n\}$ una successione e sia l un numero reale.
Diciamo che l è il **limite** di $\{a_n\}$ (oppure che la successione **tende** a l) per n **tendente all'infinito**, se:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \text{definitivamente } |a_n - l| < \varepsilon.$$

Indichiamo questo fatto scrivendo:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l, \qquad \text{o anche } a_n \to l$$

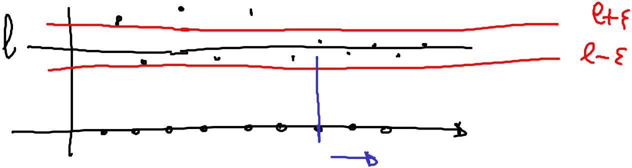
Quindi "l'operazione di limite" associa ad alcune (non a tutte le) successioni un numero reale. Come vedreno tale numero, se esiste, è unico e dipende dagli **infiniti** valori di $\{a_n\}$.
Espandendo la definizione sopra si ha che a_n tende a l significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \ (\exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n \geq n_0 \ |a_n - l| < \varepsilon))$$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ significa che

$\forall \varepsilon > 0$ $|a_n - \ell|$ è definitivamente $< \varepsilon$ $\iff$

$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ definitivamente



da qui in poi $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

Per esteso:

definitivamente

$\forall \varepsilon > 0 \quad \left(\exists\, n_0 \text{ tale che } \forall n \geq n_0 \right) \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

(n_0 dipende da ε)

Notiamo che nella scrittura più concisa $a_n \to l$ il fatto che "n tenda all'infinito" è sottinteso.

Rimarchiamo anche che è **scorretto** dire "il limite tende..." o scrivere

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \to l$$

il limite è un numero e **non si muove**!!! Bisogna dire:

il limite **è eguale** a l oppure la successione tende a l

Notiamo anche che nella definizione di limite si può dire anche:

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \text{definitivamente } l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon.$$

cioè assegnato un errore $\varepsilon > 0$ (*piccolo a piacere*) prima o poi il grafico della successione entra nella striscia $\{l-\varepsilon < y < l+\varepsilon\}$ (e non ne esce più).

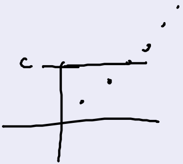
Il limite è "un'operazione" $\underset{\text{SUCCESSIONE}}{\{a_n\}} \xrightarrow{\text{(LIMITE)}} \underset{\text{NUMERO}}{l}$

(ma non tutte le $\{a_n\}$ hanno limite)

Limiti infiniti

Definizione

Diciamo che il limite di $\{a_n\}$ per n che tende a più infinito è più infinito, o anche che la successione tende a più infinito, se



$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \text{definitivamente } a_n \geq c.$$

Indichiamo questo fatto scrivendo:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \qquad \text{o anche } a_n \to +\infty.$$

Diciamo che il limite di $\{a_n\}$ per n che tende a più infinito è meno infinito, o anche che la successione tende a meno infinito, se

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \text{definitivamente } a_n \leq c.$$

e scriviamo $$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \qquad \text{o anche } a_n \to -\infty.$$

Unicità del limite

Indicheremo d'ora in poi con $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. I due elementi $-\infty$ e $+\infty$ non sono numeri – sono semplici simboli (che rimandano alle nozioni ora introdotte). È però possibile estendere anche a loro la relazione d'ordine convenendo che:

$$-\infty < x < +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(in questo modo $\geq$ rimane riflessiva, antisimmetrica e transitiva).

Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione. Siano l_1 e l_2 in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora

$$(a_n \to l_2) \wedge (a_n \to l_2) \Rightarrow (l_2 = l_2)$$

(se $\{a_n\}$ converge sia a l_1 che a l_2 allora i due limiti coincidono).
In altre parole una successione non può avere più di un limite.

Se $a_n \to \ell_1$ e $a_n \to \ell_2$ $\Longrightarrow$ $\ell_1 = \ell_2$

($\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$). (unicità del limite)

<u>Dim</u> Facciamo il caso $\ell_1 \in \mathbb{R}$ $\ell_2 \in \mathbb{R}$.

Per assurdo $\ell_1 \neq \ell_2$, per esempio $\ell_1 < \ell_2$.

Prendo $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$.

- Dato che $a_n \to \ell_1$ $\Rightarrow$ definitivamente $\ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon$
- Dato che $a_n \to \ell_2$ $\Rightarrow$ definitivamente $\ell_2 - \varepsilon < a_n < \ell_2 + \varepsilon$

$\Rightarrow$ Definitivamente valgono <u>entrambe</u> MA

per come è stato scelto ε $\quad \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$

è impossibile che

$$\boxed{\begin{matrix} a_n < \ell_1 + \varepsilon \quad \text{e} \\ a_n > \ell_2 - \varepsilon \end{matrix}} \quad (*)$$

(è facile poi generalizzare a $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$)