Analisi Matematica 1
Quarta lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

16 ottobre 2009

Alcune proprietà

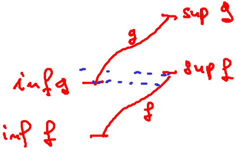
Se $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$, allora

$$\inf B \leq \inf A, \qquad \sup A \leq \sup B, \qquad \inf A \leq \sup A$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ allora

$$\inf_A f \leq \sup_A f$$

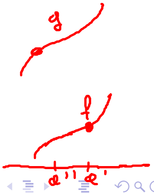
Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ e se $f(a) \leq g(a)$ per ogni a in A, allora



$$\inf_A f \leq \inf_A g, \qquad \sup_A f \leq \sup_A g$$

ATTENZIONE, NON VALE:

$$\sup_A f \leq \inf_A g \quad !!$$



PER QUESTO CI VUOLE

(servirà ...)

$$f(a') \leq g(a'') \qquad \forall a', a'' \in A$$

Ancora sulla radice di due …

Vediamo che

$$\boxed{\sup\underbrace{\{x\in\mathbb{R} : x^2\le 2\}}_{A} = \cancel{2}} \quad \text{“}\sqrt{2}\text{”}$$

DIM.

cioè se $\bar{x} = \sup A$
$\Rightarrow \bar{x}^2 = 2$, $\bar{x} > 0$

I° A è limitato superiormente

Infatti se $x \in A$ (~~, o $x \le 0$ oppure $x > 0$~~ ~~Nel caso $x > 0$~~) posso dire che $x \le 2$, perché se $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$
$\Rightarrow x \notin A$. Quindi 2 è un maggiorante di A

II° $A \neq \emptyset$. Per esempio $0 \in A$.

$\Rightarrow$ $\bar{x} = \sup A$ è un numero reale (non è $\pm\infty$)

VOGLIO ORA DIM. CHE $\bar{x}^2 = 2$, $x \geq 1$

III) $\bar{x} > 0$ segue dal fatto che $1 \in A \Rightarrow \bar{x} \geq 1$

IV) NON PUÒ ESSERE $\bar{x}^2 < 2$. Per assurdo supponiamo che $\bar{x}^2 < 2$. Dico allora che si può trovare $\varepsilon > 0$ tale che $(\bar{x}+\varepsilon)^2 < 2$. Infatti

$$(\bar{x}+\varepsilon)^2 = \bar{x}^2 + 2\varepsilon\bar{x} + \varepsilon^2 < \bar{x}^2 + 2\varepsilon\bar{x} + \varepsilon = \bar{x}^2 + \underbrace{\varepsilon(2\bar{x}+1)}_{} =$$

Scelgo $\varepsilon < 1$, e

$$\varepsilon < \frac{2-\bar{x}^2}{2\bar{x}+1}$$

< 2 ??

$\Updownarrow$

$$\bar{x}^2 + \varepsilon(2\bar{x}+1) < 2 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon(2\bar{x}+1) < 2 - \bar{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon < \frac{2-\bar{x}^2}{2\bar{x}+1}$$

QUINDI SE SCELGO $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{2-\bar{x}^2}{2\bar{x}+1}\right)$

POSSO DIRE CHE $\varepsilon > 0$ e $(\bar{x}+\varepsilon)^2 < 2$

Questo mi dà un assurdo, perché $\bar{x}+\varepsilon \in A$, ma $\bar{x}+\varepsilon > \bar{x} = \sup A$ IMPOSSIBILE!!

(V) Non può essere $\bar{x}^2 > 2$.

Infatti se, per assurdo, $\bar{x}^2 > 2$ troverei $\varepsilon > 0$ tale che $(\bar{x} - \varepsilon)^2 > 2$. Vediamo come: dato che

$$(\bar{x} - \varepsilon)^2 = \bar{x}^2 - 2\bar{x}\,\varepsilon + \varepsilon^2 \geq \bar{x}^2 - 2\bar{x}\,\varepsilon$$

basta scegliere ε con $\varepsilon < \dfrac{\bar{x}^2 - 2}{2\bar{x}}$

per esempio $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\bar{x}^2 - 2}{2\bar{x}}$

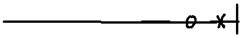
$$\left(\begin{array}{l} \bar{x}^2 - 2\bar{x}\,\varepsilon > 2 \\ \bar{x}^2 - 2 > 2\bar{x}\,\varepsilon \\ \varepsilon < \dfrac{\bar{x}^2 - 2}{2\bar{x}} \end{array}\right)$$

Così facendo ho trovato che $(\bar{x} - \varepsilon \notin A)$ e $\underline{\bar{x} - \varepsilon < \sup A}$

Dunque esiste $x' \in A$ con $x' > \bar{x} - \varepsilon \Rightarrow \underbrace{(x')^2}_{\leq 2} > \underbrace{(\bar{x} - \varepsilon)^2}_{> 2}$ ASSURDO

L'UNICA POSSIBILITÀ CHE RIMANE È $\boxed{\bar{x}^2 = 2}$

$(\sqrt{2})$



Tutti i ragionamenti fatti sopra valgono anche se consideriamo

$$A = \sup\{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}$$

e quindi se A avesse estremo superiore $\bar{q}$ si avrebbe $\bar{q}^2 = 2$.
Dato che nessun rationale ha quadrato pari a due, **l'insieme A non ammette estremo superiore (in $\mathbb{Q}$)**.

(mentre $\sup\{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\} = \sqrt{2}$ se lo vedo in $\mathbb{R}$)

In maniera analoga si può dimostrare che, dati n intero e $y \geq 0$, l'insieme

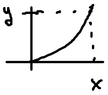
$$A_{n,y} = \{x \in \mathbb{R} : x^n \leq y\}$$

è limitato e che

$$\text{se } \bar{x} = \sup A_{n,m} \qquad \text{allora} \quad \bar{x}^n = y$$

$f(x) = x^n$

$f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$



Questo vuol dire che la funzione potenza n-esima, ristretta a $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ **ha come immagine lo stesso $\mathbb{R}^+$**.
Dato che la potenza è chiaramente iniettiva, possiamo definire la *radice n-esima* di ogni numero positivo y come quell'unico numero positivo x tale $x^n = y$. Scriveremo $x = \sqrt[n]{y}$. $\sim$ $\cdot\, f(x) = \sqrt[n]{x}$ è ben definita su $\mathbb{R}^+$

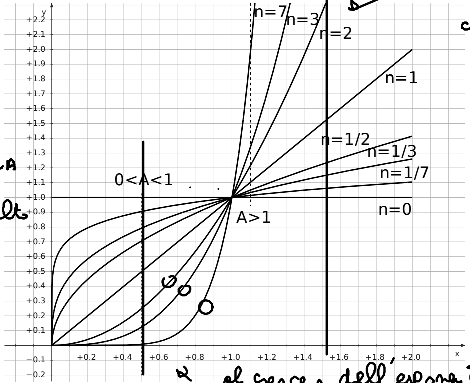
Se introduciamo l'usuale convenzione

$$x^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{x^n}$$

per ogni x positivo (modulo alcune precisazioni/precauzioni, che ora tralasciamo), abbiamo definito la potenza a esponente razionale di ogni x positivo. I grafici delle potenze sono i seguenti

x^q cresce al crescere di q !!

la funzione x^q VICINO A ZERO È TANTO PIÙ PICCOLA QUANTO PIÙ q è alto



"ALL' INFINITO" x^q È TANTO PIÙ GROSSA QUANTO PIÙ q è alto

al crescere dell'esponente q x^q DECRESCE

I numeri interi

Possiamo *individuare* i numeri interi come quell'unico sottoinsieme $\mathbb{N}$ di $\mathbb{R}$ con le seguenti proprietà

("Assiomi di Peano")

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. se $n \in \mathbb{N}$, allora $n + 1 \in \mathbb{N}$
3. se $A \subset \mathbb{N}$, se $0 \in A$, se A ha la proprietà

   (0∈A)

$$a \in A \Rightarrow a + 1 \in A \tag{1}$$

   ALLORA $A = \mathbb{N}$

Se un insieme A verifica la condizione (~~2~~ 1) diciamo che A è un **insieme induttivo**. Per esempio $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$ sono induttivi. (Anche {multipli di $\frac{1}{2}$} è induttivo

Le proprietà (1) e (2) dicono che $\mathbb{N}$ è induttivo.
La (3) dice che $\mathbb{N}$ è il **minimo insieme induttivo**, nel senso che "non ce ne sono altri contenuti in lui". Si potrebbe dimostrare che tale insieme deve esistere (ma tralasciamo la dimostrazione.)
La proprietà (3) si chiama **principio di induzione**.

Proprietà di $\mathbb{N}$

- Tutti gli interi sono maggiori o eguali a zero. $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ è limitato inf.
- Se n e m sono interi, allora $n+m$ è intero.
- Se n e m sono interi, allora $n \cdot m$ è intero.
- Se n e m sono interi e $n-m \geq 0$, allora $n-m$ è intero.
- Se n è un intero allora $]n, n+1[\cap \mathbb{N} = \emptyset$ (non c'è nessun intero tra n ed $n+1$).
- Ogni sottoinsieme $A \neq \emptyset$ di $\mathbb{N}$ ammette minimo. (è equivalente al principio di induz.)
- $\sup \mathbb{N} = +\infty$ (se $c \in \mathbb{R}$ trovo sempre $n > c$)
- Se $A \subset \mathbb{N}$ (o anche in $\mathbb{Z}$) e $\sup A < +\infty$
  $\Rightarrow$ A ammette massimo (si ragiona come nel caso del min.)

• Se $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ esiste $\min A$.

<u>Dim</u> $A \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ inferiormente limitato $\Rightarrow$ A inf. limitato

$(\mathbb{R} \ni)$ $m = \inf A$ (≥ 0) $\quad$ ($m \neq +\infty$ perché $A \neq \emptyset$)

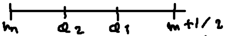
Voglio dimostrare che m è un minimo, cioè che $m \in A$

Se non fosse che $m \in A$ avrei:

(1) $\quad m < a \quad \forall a \in A$ $\quad$ (è $\leq$ per le prop. dell'inf. ma non è mai $=$)

(2) $m + \frac{1}{2} > m$: per le proprietà dell'inf. trovo $a_1 \in A$ tale che $\quad m < a_1 < m + \frac{1}{2}$

(3) Dato che $a_1 > m$, per le proprietà dell'inf, trovo $a_2 \in A$ tale che $\quad m < a_2 < a_1 < m + \frac{1}{2}$



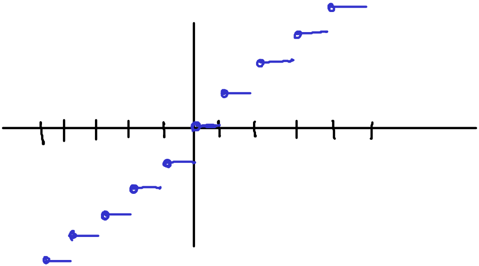
(4) Le disuguaglianze trovate mi dice che $\quad 0 < a_1 - a_2 < \frac{1}{2}$

<u>IMPOSSIBILE</u>: non ci possono essere due interi diversi, distanti tra loro meno di $1/2$!! DUNQUE $\underline{m \in A}$

· Per esempio posso definire la parte intera di un numero reale x

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$$

($[5] = 5$, $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$, $\left[-\frac{3}{2}\right] = -2$



Principio di induzione per le proprietà

(è equivalente al principio di induzione della prima \

Sia $\mathscr{P}(n)$ una proprietà definita per n intero. Allora se

(1) $\mathscr{P}(0)$ è vero
(2) per ogni n intero vale l'implicazione $\mathscr{P}(n) \to \mathscr{P}(n+1)$

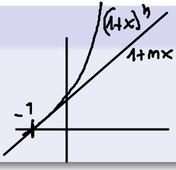
allora $\mathscr{P}(n)$ è vera per ogni n intero.
Una proprietà $\mathscr{P}(n)$ che verifichi (2) si dice induttiva.

Esempi di utilizzo del principio di induzione

Proposizione (Diseguaglianza di Bernoulli)

Se $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$ *e se* $n \in \mathbb{N}$ *vale la diseguaglianza:*

$$(1+a)^n \geq 1+na$$



Proposizione

Se A *e* B *sono due numeri reali e* n *è intero si ha:*

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1} = (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k}B^k \quad (2)$$

Esempi di utilizzo del principio di induzione

Proposizione (Somma dei primi n numeri interi)

Si ha

$$1+2+3+\cdots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

In termini di sommatoria:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposizione (Somma dei primi n numeri interi)

Si ha

$$1+2+3+\cdots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

In termini di sommatoria:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dis. di Bernoulli Se $a \in \mathbb{R}$ $a > -1$ e se $n \in \mathbb{N}$

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Per induzione: $P(n) =$ " $(1+a)^n \geq 1 + na$ "

$n=0$ $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a$ cioè $1 \geq 1$ VERA

PASSO INDUTTIVO Supponiamo $P(n)$ vera, cerco di ricavarne $P(n+1)$

$(1+a)^n \geq 1 + na$ MOLTIPLICO PER $1+a > 0$

$\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$ cioè

$\Leftrightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1 + \underbrace{na + a}_{} + na^2$ ≥ 0 dato che $a^2 \geq 0$

$\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

HO DIM. CHE $\boxed{(1+a)^n \geq 1 + na \implies (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a}$

$A \geq B + na^2 \implies A \geq B$

. La dim. fatta sopra schematizza questo ragionamento

$(1+a)^1 \geq (1+1\cdot a)$ (caso $n=1$) VERA

$n=2$

$(1+a) \geq (1+a)$ MOLTIPLICO PER $1+a$

$(1+a)^2 \geq 1+2a+a^2 \geq 1+2a$ (dato che $a^2 \geq 0$)

$n=3$

$(1+a)^2 \geq 1+2a$ MOLTIPLICO PER $1+a$

$(1+a)^3 \geq 1+2a+a+2a^2 \geq 1+2a+a = 1+3a$

e così via . . . .

· $A, B \in \mathbb{R}$ $\qquad A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$

$$= (A-B) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k}$$

Per es. $(n=3)$ $k \in \{0, 1, 2\}$

$$\sum_{n=0}^{2} A^{2-k} B^k = A^2 + AB + B^2$$

SOMMO TUTTE LE ESPRESSIONI DEL TIPO $A^{n-k}B^k$, FACENDO VARIARE K TRA 0 E n.

$k=0$ $A^2 B^0$, $k=1$ $A^1 B^1$, $k=2$, $A^0 B^2 \longrightarrow A^2 + AB + B^2$

Ragiono per induzione su n.

<u>CASO n = 1</u> $\qquad A - B = (A-B) \sum_{k=0}^{0} A^{0-k} B^k$

Vero perché $\sum_{k=0}^{0} A^{0-k} B^k = A^{0-0} B^0 = A^0 B^0 = 1$

& solo $k=0$

<u>Passo induttivo</u> $\qquad$ Suppongo vera la formula al passo n.

$$A^n - B^n = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$$

· Moltiplico per A ·

$$A^{n+1} - AB^{n} = (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A\,A^{n-1-k}B^{k}$$

$$A^{n+1} - B^{n+1} = AB^{n} - B^{n+1} + (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k}B^{k}$$

$$A^{n+1} - B^{n+1} = B^{n}(A-B) + (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k}B^{k}$$

$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)\left\{\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k}B^{k} + B^{n}\right\}$$

$$\underbrace{A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)\sum_{k=0}^{n} A^{n-k}B^{k}}_{\text{caso } n+1} \longleftarrow$$

è eguale a $A^{n-k}B^{k}$ se $k = n$

DUNQUE LA FORMULA È VERA per ogni n !!

Definizioni ricorsive PROSSIMA LEZIONE

Siano dati un numero reale x_0 e una funzione $F : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (cioè $(x,n) \mapsto F(x,n)$). La scrittura:

$$\begin{cases} f(0) := x_0 \\ f(n+1) := F(f(n),n) \end{cases}$$

definisce univocamente una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Esempio

La definizione

$$\begin{cases} f(0) := 1 \\ f(n+1) := A \cdot f(n) \end{cases}$$

individua esattamente la funzione potenza di base A: $f(n) = A^n$

Esempio

La definizione

$$\begin{cases} f(0) := 1 \\ f(n+1) := (n+1) \cdot f(n) \end{cases}$$

individua esattamente la funzione fattoriale: $f(n) = n!$

Esempio

La definizione

$$\begin{cases} f(0) := 3 \\ f(n+1) := f(n)^2 - f(n) \end{cases}$$

individua univocamente una funzione, che (probailmente) non riusciamo a esprimere in termini di funzioni elementari, ma di cui, in linea di principio potremmo generare tutti i valori:

$$f(0) = 3, f(1) = 9 - 3 = 6, f(2) = 36 - 6 = 30, f(3) = 900 - 30 = 870, \dots$$