Analisi Matematica 1
Terza lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**

Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

15 ottobre 2009

NUMERI REALI

Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei **numeri reali**. Non diremo cosa sono (o come si potrebbero costruire a partire per esempio dai numeri interi). Faremo invece una presentazione **assiomatica**, mettendo in evidenza che proprietà hanno e cosa possiamo fare con loro.
Da questo punto di vista i reali costituiscono un
corpo ordinato e completo:

somma

corpo $\rightarrow$ sono definite le **operazioni** $+$ e $\cdot$ Prodotto
ordinato $\rightarrow$ è definita la **relazione d'ordine** $\geq$
completo $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ "non ha buchi" (da precisare dopo)

Struttura di corpo

Sono definite due operazioni $s(x,y) = x+y$ (la **somma**) e $p(x,y) = x \cdot y = xy$ (il **prodotto**) che hanno le seguenti proprietà:

$c+)$ $a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$ a+b+c **(pr.commutativa** per $+$)

$a+)$ $(a+b)+c = a+(b+c)\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ **(pr. associativa** per $+$)

$n+)$ $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tale che $a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ **(el. neutro** per $+$)

$i+)$ $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}$ tale che $a+(-a) = 0$ **(inverso** per $+$)

OPPOSTO DI a

$c\cdot)$ $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$ a · b · c **(pr.commutativa** per $\cdot$)

$a\cdot)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ **(pr. associativa** per $\cdot$)

$n\cdot)$ $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tale che $1 \neq 0$ e $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ **(el. neutro** per $\cdot$)

$i\cdot)$ $\forall a \in \mathbb{R}, \underline{a \neq 0} \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot a^{-1} = 1$ **(inverso** per $\cdot$)

RECIPROCO DI a

$d+\cdot)$ $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ **(pr. distributiva)**

Gli assiomi appena scritti permettono di ricavare tutte le proprietà *algebriche* dei reali. ALCUNI ESEMPI.

- L'elemento neutro 0 è unico.
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 0 = 0.$
- $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$ (**annullamento del prodotto**).

(1) Se ci fossero 0 e $0'$ entrambi neutri

$$\underbrace{0 =}_{0' \text{ è neutro}} 0 + \underbrace{0' =}_{0 \text{ neutro}} 0' \Longrightarrow 0 = 0'$$

(2) $a \cdot 0 \underset{(0 \text{ è neutro})}{=} a(0+0) \underset{(\text{distrib.})}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$ — somma $-(a \cdot 0)$ all'eguaglianza

$$a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 \Longleftrightarrow 0 = a \cdot 0 \quad \#$$

Gli assiomi appena scritti permettono di ricavare tutte le proprietà *algebriche* dei reali. ALCUNI ESEMPI.

- L'elemento neutro 0 è unico.
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 0 = 0.$
- $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$ (**annullamento del prodotto**).

(3) Se non fosse vero ci sarebbero $a \neq 0$ e $b \neq 0$ tali che

$a \cdot b = 0$ MOLTIPLICO PER $\frac{1}{a}$

$\frac{1}{a} \cdot a \cdot b = \frac{1}{a} \cdot 0 \iff 1 \cdot b = 0 \iff b = 0$ assurdo

Si potrebbe continuare . . . . $\left(\text{Per esempio } \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \right)$

Struttura d'ordine

In $\mathbb{R}$ è definita una relazione binaria, cioè un predicato a due variabili $\mathscr{R}(x,y)$, che su scrive di solito $x \geq y$ (e si legge x è *maggiore o eguale* a y, quando $\mathscr{R}(x,y) = (x \geq y)$ è vera)

Dato comunque $x, y \in \mathbb{R}$ uno delle due è sicuramente vero $x \geq y$ o $y \geq x$

Tale relazione verifica:

$(r \geq)$ $a \geq a \ \forall a \in \mathbb{R}$ (pr. **riflessiva**)

$(a \geq)$ $(a \geq b) \wedge (b \geq a) \to (a = b) \ \forall a, b \in \mathbb{R}$ (pr. **antisimmetrica**)

$(t \geq)$ $(a \geq b) \wedge (b \geq c) \to (a \geq c) \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (pr. **transitiva**)

$(+ \geq)$ $(a \geq b) \to (a + c \geq b + c) \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$(\cdot \geq)$ $(a \geq b) \wedge (c \geq 0) \to (a \cdot c \geq b \cdot c) \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Una relazione $x \geq y$ avente le prime tre proprietà sopra si dice **relazione d'ordine** (totale in quanto è definita per tutte le possibili coppie x, y in $\mathbb{R}$). Le altre due proprietà stabiliscono che la relazione d'ordine *va d'accordo* con la somma e li prodotto.

$x \geq_o y$

Si definiscono poi:

$$(x > y) := (x \geq y) \wedge (x \neq y)$$

$$(x \leq y) := \tilde{}\,(x > y) \qquad (x < y) := (x \leq y) \wedge (x \neq y)$$

Dalle proprietà precedenti si ricava tutto ciò che serve per trattare le diseguaglianze e le disequazioni.

- $\boxed{(0 \geq a) \leftrightarrow (a \leq 0)}$
- $(a \geq 0) \leftrightarrow (-a \leq 0)$
- $(a \geq b) \wedge (c \leq 0) \to (ac \leq bc)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

(1) Notiamo che $a \leq 0$ vuol dire che $\sim(a > 0)$ e cioè

$\sim((a \geq 0) \wedge (a \neq 0)) = \sim(a \geq 0) \vee (a = 0)$

Dimostro che vale ($\to$) (se $0 \geq a$ allora $a \leq 0$).

Per assurdo suppongo $0 \geq a$ e non $(a \leq 0)$, cioè

$0 \geq a$ e $a > 0$, cioè $\underbrace{(0 \geq a) \wedge (a \geq 0)}_{a=0 \text{ (antisimm.)}} \wedge (a \neq 0)$, cioè $(a = 0) \wedge (a \neq 0)$ ASSURDO

(lascio perdere $\leftarrow$)

Dalle proprietà precedenti si ricava tutto ciò che serve per trattare le diseguaglianze e le disequazioni.

① • $(0 \geq a) \leftrightarrow (a \leq 0)$

→ • $(a \geq 0) \leftrightarrow (-a \leq 0)$

• $(a \geq b) \wedge (c \leq 0) \rightarrow (ac \leq bc)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

$a \geq 0$ sommo $-a$ (prop $+$ $>$)

$a - a \geq -a$

$0 \geq -a \iff -a \leq 0$

(proprietà 1)

③

$a \geq b$ e $c \leq 0$; allora $-c \geq 0$ posso moltipl. per $-c$

· dunque $a(-c) \geq b(-c)$ (si deduce dalle prop. algebriche)

$-(a \cdot c) \geq -(bc)$ sommo $ac + bc$

$\cancel{ac} + bc - \cancel{ac} \geq ac + \cancel{bc} - \cancel{bc}$ fatti i calcoli

$bc \geq ac$ cioè

$ac \leq bc$ #

Si può continuare ...

- ...

Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ sono contenuti:

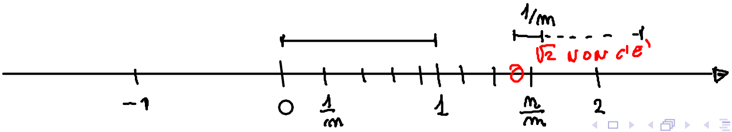
- gli interi $\mathbb{N} = \{0, 1, 1+1, 1+1+1, \dots\}$ (su questo torneremo).
- gli interi relativi $\mathbb{Z} = \{\pm n : n \in \mathbb{N}\}$
- i razionali $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Finora peraltro anche $\mathbb{Q}$ verifica TUTTE le propietà considerate.
I numeri razionali si possono *mandare* sulla retta
ma, come già visto, **non coprono** tutti i punti della retta.

C'è una corrispondenza tra $\mathbb{Q}$ e la retta

HO BISOGNO DI $\mathbb{R}$



Intervalli

Gli intervalli sono dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definiti come segue.
Dati a e b in $\mathbb{R}$ con $a \leq b$ si pone:

- $[a,b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ **(intervallo chiuso)**
- $]a,b[:= \{x : a < x < b\}$ **(intervallo aperto)**
- $[a,b[:= \{x : a \leq x < b\}$ **(intervallo semiaperto a destra)**
- $]a,b] := \{x : a < x \leq b\}$ **(intervallo semiaperto a sinistra)**
- $[a,+\infty[:= \{x : a \leq x\}$ **(semiretta positiva chiusa)**
- $]a,+\infty[:= \{x : a < x\}$ **(semiretta positiva aperta)**
- $]-\infty,b] := \{x : x \leq b\}$ **(semiretta negativa chiusa)**
- $]-\infty,b[:= \{x : x < b\}$ **(semiretta negativa aperta)**

a e b sono detti gli **estremi** dell'intervallo (o semiretta) corrispondente. Le semirette sono anch'esse degli intervalli, che sono *illimitati*, a differenza degli intervalli con estremi reali, che sono *limitati*.
I simboli $\pm\infty$ (per ora) sono semplici accorgimenti grafici.

Limitatezza

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.
Definizione Si dice che A è **limitato superiormente** se esiste un numero reale M tale che

$$a \leq M \quad \forall a \in A$$

(Se c'è un maggiorante ce ne sono infiniti, tutti "quelli dopo" sono maggioranti)

Un tale M (se esiste) si chiama **maggiorante** per l'insieme A. Quindi A è limitato superiormente se e solo se esiste un maggiorante per A.
Definizione Si dice che A è **limitato inferiormente** se esiste un numero reale m tale che

$$a \geq m \quad \forall a \in A$$

Allora m si dice **minorante** per A e, come prima,
A è limitato inferiormente$\Leftrightarrow$ A ammette un minorante
Definizione Si dice che A è **limitato** se è contemporaneamente limitato superiormente e inferiormente.

Massimi e minimi

Definizione Si dice che un numero reale $\bar{a}$ è il **massimo** per l'insieme A se:

$$\underline{\bar{a} \in A}, \qquad \underline{a \le \bar{a} \quad \forall a \in A}$$

$\left(\begin{array}{l} \bar{a} \text{ è un maggiorante} \\ \bar{a} \in A \end{array} \right)$

($\bar{a}$ è l'elemento di A più grande di tutti). Si scrive in tal caso

IL MAX È UNICO

$$\bar{a} = \max A$$

Analogamente numero reale $\underline{a}$ è il **minimo** per l'insieme A se:

$$\underline{a} \in A, \qquad a \ge \underline{a} \quad \forall a \in A$$

e si scrive

$$\underline{a} = \min A$$

Chiaramente:

$$A \text{ ha massimo } \Rightarrow A \text{ è limitato superiormente}$$

$$A \text{ ha minimo } \Rightarrow A \text{ è limitato inferiormente}$$

IL VICEVERSA NON VALE

limitato : 0 è minorante
1 è maggiorante

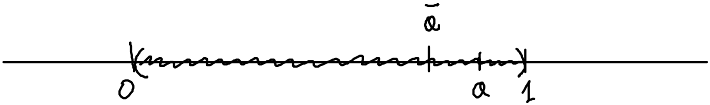
L'intervallo aperto $]0,1[$ **non ha** né massimo né minimo.
Vediamo che non ha massimo. Vediamo cioè che è falso:

$$\exists \bar{a} \in]0,1[: (\forall a \in]0,1[\; a \leq \bar{a})$$

vogliamo cioè che

$$\forall \bar{a} \in]0,1[\; \exists a \in]0,1[: a > \bar{a})$$

Per questo basta osservare che dato $\bar{a}$ con $0 < \bar{a} < 1$ si può prendere $a := \dfrac{\bar{a}+1}{2}$ (cioè il punto medio tra $\bar{a}$ e 1) e allora si ha $\boxed{\bar{a} < a < 1.}$



Estremi superiore e inferiore

Sia A un insieme con $A \neq \emptyset$

Definizione Un numero reale $\bar{a}$ si dice l'**estremo superiore** di A se

$$\bar{a} = \min\{M : M \text{ è maggiorante per } A\}$$

e in tal caso si scrive $\bar{a} = \sup A$. (nell'esempio precedente $A =]0,1[$. $\{$Maggioranti$\} = [1, +\infty[\Rightarrow \sup A = 1$)

Definizione Un numero reale $\underline{a}$ si dice l'**estremo inferiore** di A se

$$\underline{a} = \max\{M : M \text{ è minorante per } A\}$$

e in tal caso si scrive $\underline{a} = \inf A$. Notiamo che:

- $\bar{a} = \max A \Leftrightarrow (\bar{a} = supA) \wedge (\bar{a} \in A)$
- $\underline{a} = \min A \Leftrightarrow (\underline{a} = infA) \wedge (\bar{a} \in A)$

$$\boxed{\sup]0,1[= 1 \qquad \inf]0,1[= 0}$$

Vediamo la prima affermazione. Prima di tutto verifichiamo che

$$B := \{\text{maggioranti di }]0,1[\} = [1,+\infty[\qquad \Rightarrow \min B = 1 = \sup A$$

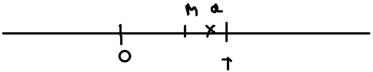
- Infatti tutti i numeri in $[1,+\infty[$, sono maggioranti per A:

$$M \geq 1 \Rightarrow \forall a \in]0,1[\; M \geq 1 > a \Rightarrow M \geq 1$$

mentre se $M < 1$, allora M non è più maggiornate per A: preso $a := \dfrac{M+1}{2}$ risulta

$$a \in]0,1[\qquad M < a$$

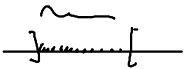
Dunque l'insieme dei maggioranti è $[1,+\infty[$, che ha ovviamente minimo pari a 1



Fino a ora sarebbe stato lo stesso se ci fossimo messi in $\mathbb{Q}$.
Però se insistessimo nel rimanere in $\mathbb{Q}$ troveremmo subito degli insiemi limitati che non hanno estremo superiore:

$$A := \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\} \quad \circledast$$

$q : q^2 < 2$



Questo è legato al fatto che

NON ESISTE NESSUN RAZIONALE q TALE CHE $q^2 = 2$

$\circledast$ Non esiste $\min \{ q \in \mathbb{Q} : q \geq q' \ \forall q' \in A \} \in \mathbb{Q}$

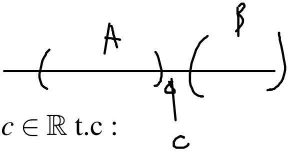
(si dimostra con un po' di pazienza che se ci fosse tale minimo il suo quadrato sarebbe 2)

ASSIOMA DI COMPLETEZZA Ogni insieme limitato superiormente e non vuoto in $\mathbb{R}$ **ammette** estremo superiore.

Ogni insieme limitato inferiormente e non vuoto in $\mathbb{R}$ **ammette** estremo inferiore.

FORMULAZIONE EQUIVALENTE Supponiamo che A e B siano una *sezione* di $\mathbb{R}$, cioè $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e

$$\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$$



Allora esiste un *elemento separatore*, cioè un numero $c \in \mathbb{R}$ t.c :

$$\forall a \in A \ \forall b \in b \ a \leq c \leq b$$

Caratterizzazioni

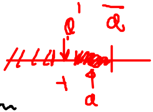
Se A è un insieme non vuoto e superiormente limitato e $\bar{a} \in \mathbb{R}$

$$\bar{a} = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \bar{a} \; \forall a \in A \\ \forall a' < \bar{a} \; \exists a : (a \in A) \wedge (a' < a) \end{cases}$$

La prima riga dice che $\bar{a}$ è un maggiorante per A, la seconda che tutti numeri più piccoli di $\bar{a}$ non sono maggioranti.
Dunque $\bar{a}$ è il minimo dei maggioranti. Analogamente

$$\underline{a} = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \underline{a} \; \forall a \in A \\ \forall a' > \underline{a} \; \exists a : (a \in A) \wedge (a' > a) \end{cases}$$

$A =]0,1[\; ; \; \sup A = 1 \iff \begin{cases} 1 \geq a \quad \forall \; a \in]0,1[\\ \text{se } a' < 1 \quad \exists \; a \in]0,1[\text{ con } a > a' \end{cases}$



Casi infiniti Se A non è limitato superiormente si pone $\sup A = +\infty$
Se A non è limitato inferiormente si pone $\inf A = -\infty$
Inoltre si conviene che $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$ (non è strettamente necessario)
Nei casi infiniti le caratterizzazioni precedenti diventano: sia $A \neq \emptyset$, allora

$$\sup A = +\infty \Leftrightarrow \forall a' \in \mathbb{R} \exists a : (a \in A) \wedge (a' < a)$$

Questa è in effetti la caratterizzazione del fatto che A non è limitato superiormente.
Analogamente

$$\inf A = -\infty \Leftrightarrow \forall a' \in \mathbb{R} \exists a : (a \in A) \wedge (a' > a)$$

Con queste convenzioni: ha sempre senso scrivere $\sup A$, $\inf A$
(qualunque sia l'insieme $A \subset \mathbb{R}$)

Estremo superiore di una funzione a valori reali

Se $a \neq \emptyset$ e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione, definiamo l'estremo superiore di f in A:

$$\boxed{\sup_A f := \sup f(A)} \qquad \text{indicato anche con } \sup_{x \in A} f(x).$$

Questa definizione si applica anche nel casi infinito. In particolare:

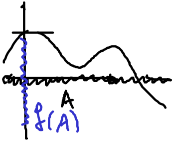
$$f \text{ si dice } \textbf{limitata superiormente su } A \text{ se } \sup_A f < +\infty$$

$$\Updownarrow$$

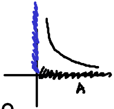
$$f(A) \text{ è limitato superiormente}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists M : (\forall a \in A\, f(a) \leq M).$$



$\sup_{\{x>0\}} \frac{1}{x} = +\infty$



$\inf_{\{x>0\}} \frac{1}{x} = 0$

Estremo inferiore di una funzione a valori reali

Analogamente definiamo l'estremo inferiore di f in A:

$$\boxed{\inf_A f := \inf f(A)}$$

indicato anche con $\inf_{x \in A} f(x)$. Allora

$$f \text{ si dice } \textbf{limitata inferiormente su } A \text{ se } \inf_A f > -\infty$$

$$\Updownarrow$$

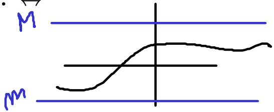
$$f(A) \text{ è limitato inferiormente}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists m : (\forall a \in A \; f(a) \geq m).$$

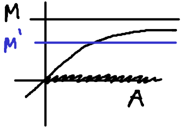
Infine f si dice **limitata su** A se è limitata sia sup. che inf. $\Leftrightarrow$

$$\exists m, M : (\forall a \in A \; m \leq f(a) \leq M).$$



Caratterizzazione degli estremi di una funzione

$$M = \sup_A f \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) \leq M \ \forall a \in A \\ \forall M' < M \ \exists a : (a \in A) \wedge (M' < f(a)) \end{cases}$$

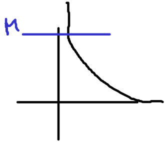


Analogamente

$$m = \inf_A f \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) \geq m \ \forall a \in A \\ \forall m' > m \ \exists a : (a \in A) \wedge (m' > f(a)) \end{cases}$$

Nei casi infiniti

$$\sup_A f = +\infty \Leftrightarrow \forall M' \in \mathbb{R} \ \exists a : (a \in A) \wedge (M' < f(a))$$



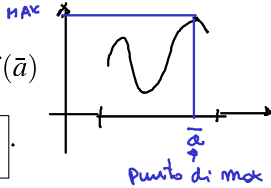
e

$$\inf_A f = -\infty \Leftrightarrow \forall m' \in \mathbb{R} \ \exists a : (a \in A) \wedge (m' > f(a))$$

Massimi e minimi per una funzione

DEFINIZIONE Un numero reale M si dice **massimo** per f su A se $M = \max f(A)$, cioè se

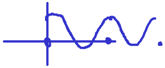
$$f(a) \leq M \quad \forall a \in A \quad \text{e} \quad \exists \bar{a} \in A : M = f(\bar{a})$$



in tal caso scriviamo $\boxed{M = \max_A f}$ o anche $\boxed{M = \max_{a \in A} f(a)}$.

Un punto $\bar{a}$ in A (non per forza unico) in cui $f(\bar{a}) = \max_A f$ si chiama punto di massimo per f su A - DA NON CONFONDERE con il massimo.

Analogamente:



HA MAX = 1
HA INFINITI PTI DI MAX
0, 2π, 4π, ...

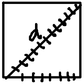
$\boxed{m = \min_A f}$ o anche $\boxed{m = \min_{a \in A} f(a)}$,detto il **minimo** di f su A, $\rightarrow$

$$f(a) \geq m \quad \forall a \in A \quad \text{e} \quad \exists \underline{a} \in A : m = f(\underline{a})$$

Se $\underline{a} \in A$ e $\min_A f = f(\underline{a})$, $\underline{a}$ si dice **punto di minimo** per f su A.

$\mathbb{Q}$ non ricopre la retta

La diagonale del quadrato non è in rapporto razionale con il lato



$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2$$

$d = n$

$\ell = m$

$$\boxed{n^2 = 2m^2 \qquad n, m \in \mathbb{N}}$$

$\Rightarrow$ IMPOSSIBILE

<u>Dim.</u> Supponiamo che ci siano $n, m \in \mathbb{N}$ con $n^2 = 2m^2$

(1) posso supporre che <u>n e m siano primi tra loro</u> — se avessero un fattore comune k $\quad n = k n_0 \quad m = k m_0$

$\Rightarrow \quad k^2 n_0^2 = 2 k^2 m_0^2 \quad \Rightarrow \quad n_0^2 = 2 m_0^2$ (ho eliminato k)

così facendo elimino tutti i fattori comuni

(2) So che ogni intero ha una fattorizzazione unica in primi

Da $\underline{n^2 = 2m^2}$ $\Rightarrow$ n^2 è PARI $\Rightarrow$ n PARI

(se n fosse dispari n^2 sarebbe dispari: $n = 2k+1 \Rightarrow$
$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ è DISPARI)

Allora $n = 2^p n_1$, n_1 dispari $\Rightarrow$ $n^2 = 2^{2p} \cdot n_1^2$

D'altra parte m è dispari (primo con n) $\Rightarrow$ m^2 dispari

Ho trovato $2^{2p} n_1^2 = 2^1 m^2$

DISPARI

NON TORNANO GLI ESPONENTI DI 2

$(2p \neq 1)$

ASSURDO.

- Dunque non c'è nessun $q \in \mathbb{Q}$ con $q^2 = 2$

- La diagonale del quadrato non ha "coordinate" razionali

$\boxed{\mathbb{Q} \text{ HA DEI BUCHI}}$