Analisi Matematica 1
Seconda lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

9 ottobre 2009

(sulla pag. web → Lezioni dell'anno scorso ...)

Logica (cont)

IMPLICAZIONE (MATERIALE)

$P \to Q$

		P: V	P: F
Q	V	V	V
	F	F	V

L'unico caso in cui $P \to Q$ è falsa è

P VERA, Q FALSA ($P \to Q$ È LO STESSO $\sim P \vee Q$)

NELLA PRATICA SI INCONTRANO

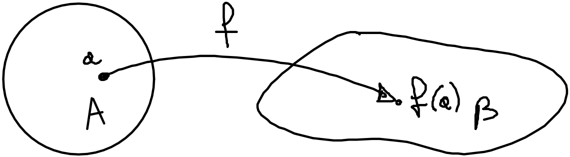
$$\boxed{\forall x \quad P(x) \to Q(x) \qquad \text{per es.}} \qquad P(n) \Rightarrow Q(n)$$

$\forall n$ n è multiplo di 4 $\to$ n PARI

FUNZIONE

A, B insiemi

una funzione f definita su A, a valori in B ($f : A \to B$) è "una relazione" che a ogni elemento di A associa un UNICO elemento di B



- Dato $a \in A$ $f(a)$ è il <u>valore</u> che f assume in a
  <u>argomento</u> di f
- A DOMINIO B CODOMINIO (di f)
- La funzione è definita dalla "terna" A, B, f

- Per esempio $f(x)=x^2$ $\quad A=\mathbb{R}$ (numeri reali)
$B=\mathbb{R}$

la funzione "elevamento al quadrato" $\quad (f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$

$f(1)=1 \quad f(2)=4, \quad f(5)=25, \quad f(-3)=9 \;\ldots$

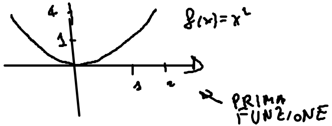
- se prendo $A=[0,+\infty[$, $B=[0,+\infty[$ $\quad (\{x\in\mathbb{R}, x\geq 0\})$

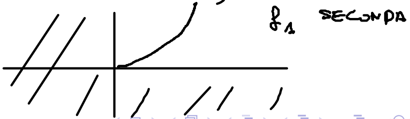
formalmente $f_1(x)=x^2$ È UN'ALTRA FUNZIONE

(nella pratica si sottintende ...)

- <u>GRAFICO</u> dato $f:A\to B$

$$G=\{(a,b) : a\in A, b\in B, b=f(a)\}$$





• Nella pratica si dà una espressione, per es.

$f(x) = \frac{1}{x+1}$ e si chiede qual è il dominio di f

→ il "più grande" insieme su cui ha senso calcolare l'espressione data. In questo caso $\underline{x \neq -1}$

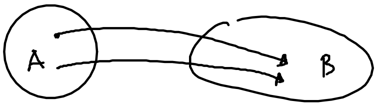
• La x è una $\boxed{\text{variabile muta}}$

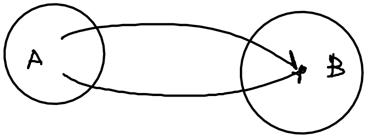
$f(x) = x^2$ / $f(t) = t^2$ SONO LA <u>STESSA</u> f

A RIGORE DOVREI DIRE "la funzione f definita da $f(x) = x^2$, per $x \in \dots$, o volendo..."

oppure $x \mapsto x^2$

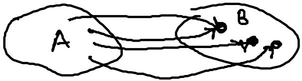
- <u>f iniettiva</u> per ogni $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ si ha $f(a_1) \neq f(a_2)$



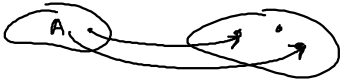


<u>NO</u>

<u>f surgettiva</u> se ogni elemento $b \in B$ è "immagine" di un elemento $a \in A$: $\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$



SI



NO

<u>f bigettiva</u> se f è sia iniettiva che surgettiva.

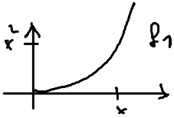
Fatto se $f: A \to B$ bigettiva risulta definita

$f^{-1}: B \to A$ con la proprietà

$f^{-1}(b) =$ quell'unico a tale che $f(a) = b$

(e esiste perché f è surgettiva, è unico perché è iniettiva)

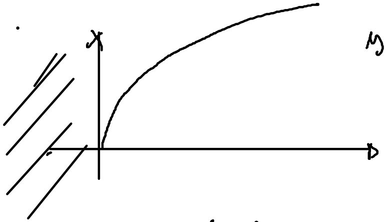
Per esempio se $f_1(x) = x^2$ $f_1 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$



- f_1 è iniettiva ($0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$)
- f_1 è surgettiva (è una proprietà di $\mathbb{R}$ che ogni numero $y \geq 0$ è un quadrato)

$\Rightarrow$ Posso definire la funzione inversa $f_1^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$

$f_1^{-1}(y) = x$ se e solo se $y = x^2$, $x \geq 0$ (per $y \geq 0$) (LA RADICE QUADR.



$\sqrt{x}$ = l'unico $y \geq 0$
per cui $y^2 = x$

DUNQUE • $(\sqrt{x})^2 = x$ per ogni $x \geq 0$ (non ha senso se $x<0$)

• $\sqrt{x^2} = x$ ha senso $\forall x \in \mathbb{R}$
NO

$x=-1$ $x^2=1$ $\sqrt{1} = 1 \neq x$

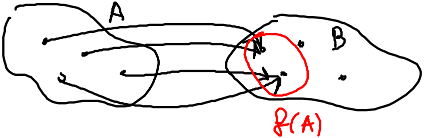
$\sqrt{x^2} = |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$

• SECONDO LE DEF. "$\sqrt{x}$" NON E' L'INVERSA DI "x^2" BENSì "la restrizione di x^2 su $[0,+\infty[$)

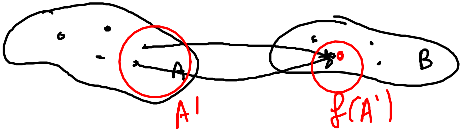
$\cdot\ f : A \to B$

IMMAGINE DI A tramite f, $f(A)$

$$f(A) = \{ b \in B : (\exists\, a \in A : f(a) = b)\}$$



Più in generale se $A' \subset A$ $\quad f(A) = \{ b \in B : (\exists\, a \in A' : f(a) = b)\}$

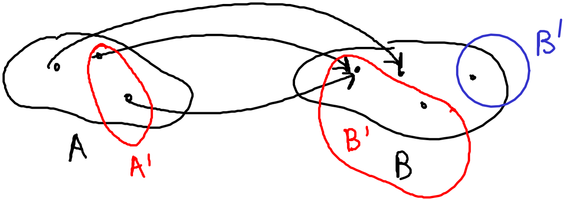


$f(A') = \{\tilde{b}\}$

CONTROIMMAGINE

$B' \subset B$

$$f^{-1}(B') = \{ a \in A : f(a) \in B' \}$$



$f^{-1}(B') = \emptyset$

PUÒ ESSERE $f^{-1}(B') = \emptyset$ SE B' NON È IMMAGINE DI NULLA

NOTA IMMAGINE (O VALORE) DI f IN UN PUNTO $\rightarrow$ UN PUNTO

IMMAGINE DI f DI UN INSIEME $\rightarrow$ INSIEME

CONTROIMMAGINE $\rightarrow$ " "

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

DOMINIO $= \mathbb{R}$

CODOMINIO $= \mathbb{R}$

CHI È $f(\mathbb{R})$?? Dato $y \in \mathbb{R}$ mi chiedo se $\exists x : f(x) = y$

$$y = \frac{x}{1+x^2} \iff (1+x^2)y = x \iff yx^2 - x + y = 0$$

- se $y = 0 \longrightarrow x = 0$
- se $y \neq 0$ ho un'eq. di II° grado $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}$

$\Delta = 1 - 4y^2$ è $\geq 0 \iff |y| \leq \frac{1}{2}$ $\left(-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right)$

DUNQUE
- se $|y| > \frac{1}{2}$ NON C'È NESSUNA x : $f(x) = y$
- se $y = \pm\frac{1}{2}$ TROVO $x = \pm 1$ $\left(f(\pm 1) = \pm 1/2\right)$

- $0 < |y| < \frac{1}{2}$ TROVO DUE POSSIBILI x

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4y^2}}{2y} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}$$

- $y = 0$ trovo $x = 0$

$\Rightarrow$ $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow$ f NON È INIETTIVA se $y = \frac{1}{4}$ TROVO DUE POSSIBILI x in cui f vale $\frac{1}{4}$

CRESCENZA / DECRESCENZA SE $f : I \to \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$

f CRESCENTE $\overset{}{\underset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow}}$ $\left(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \right)$

f DECRESCENTE (" " $f(x_1) \geq f(x_2)$)

- $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Prendiamo $\boxed{x_1 < x_2}$; ci chiediamo se $f(x_1) < f(x_2)$

$$\iff \frac{x_1}{1+x_1^2} < \frac{x_2}{1+x_2^2} \iff x_1(1+x_2^2) < x_2(1+x_1^2)$$

$$\iff x_1 + x_1 x_2^2 < x_2 + x_2 x_1^2$$

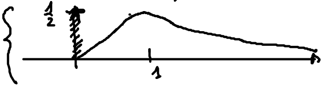
$$\iff x_1 - x_2 + x_1 x_2 (x_2 - x_1) < 0$$

$$\iff (x_1 - x_2)(1 - x_1 x_2) < 0 \qquad (\text{ip. } x_1 < x_2)$$

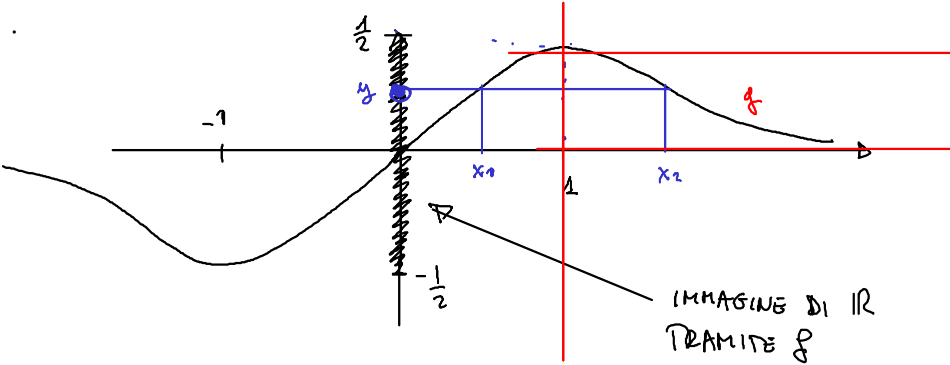
$$\iff 1 - x_1 x_2 > 0 \iff x_1 x_2 < 1$$

SI RICAVA CHE

- Se $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- Se $1 \leq x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

$f(\mathbb{R})$ 

(simmetrico sui negativi)



$$f([0,+\infty[) = [0,\tfrac{1}{2}]$$

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2\} \qquad f^{-1}(\{\tfrac{1}{2}\}) = \{1\}$$

Se chiamo $g(x)$ la funzione $g : [1,+\infty[\to]0, 1/2]$

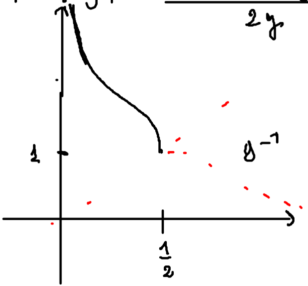
$g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ è BIGETTIVA $\Rightarrow$ esiste g^{-1}

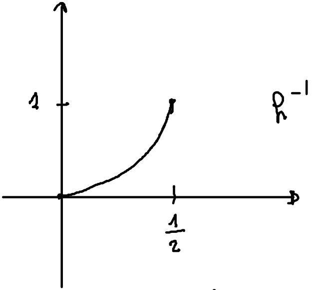
$$g^{-1}(y) = x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y} \qquad \left(\underset{0<x\leq 1/2}{g^{-1}(x)} = \frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x} \right)$$

· Se invece $h(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $0 \le x \le 1$, a valori in $[0, \frac{1}{2}]$

anche questa è bigettiva e

$$h^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y} \quad (y \neq 0), \qquad h^{-1}(0) = 0$$





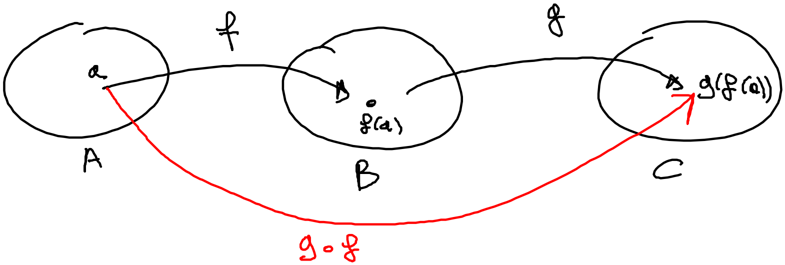
il grafico della funzione inversa è il simmetrico del grafico della funzione, rispetto alla diagonale.

Funzione composta

data $f: A \to B$

data $g: B \to C$

posso considerare $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$



Fatto Se $f: A \to B$, $g: B \to A$

$g = f^{-1} \iff (g \circ f)(a) = a$ $\forall a \in A$ e $(f \circ g)(b) = b$ $\forall b \in B$

· Esempio $f(x) = 1 + x^2$ $\quad (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

$g(x) = 2 + x$

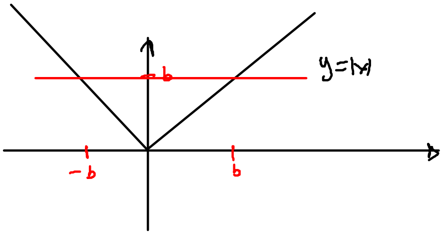
$f \circ g$? $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2+x) =$

$1 + (2+x)^2 = 1 + 4 + 4x + x^2 = 5 + 4x + x^2$

$g \circ f$? $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1+x^2) =$

$2 + (1 + x^2) = 3 + x^2$

FUNZIONE $f(x) = |x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$



- $|x| \geq 0 \quad \forall x \qquad |x| = 0 \iff x = 0$
- $\{|x| \leq b\} = [-b, b]$ se $b \geq 0$ (se no $\emptyset$)

$\Rightarrow \{|x-a| \leq b\} = \{-b \leq x-a \leq b\} = [a-b, a+b]$

- la funzione $|x|$ rappresenta "la distanza di x da zero"

$|x-a|$ = "distanza di x da a"

- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (DIS. TRIANGOLARE)