1 Sostituzione di infinitesimi e infiniti

Definizione 1.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 di accumulazione per A ($x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$). Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni.*

Diciamo che f è un infinitesimo di ordine superiore a g se $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$, $g(x) \neq 0$ per x vicino a x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Diciamo che f è un infinito di ordine superiore a g se $f(x) \to \infty$ per $x \to x_0$, $g(x) \neq 0$ per x vicino a x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Non abbiamo richiesto che la funzione g sia infinitesima (infinita) in x_0; questo permette di usare il seguente utile artificio: $f(x) \to 0$ ($f(x) \to \infty$) se e solo se $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore alla funzione costante $g(x) = 1$ (se e solo se $f(x)$ è un infinito di ordine superiore alla funzione costante $g(x) = 1$).

In tutto questo paragrafo A è fissato in $\mathbb{R}$ e x_0 è un punto di accumulazione per A. Sottintendiamo d'ora in poi (se non detto altrimenti) che tutti i limiti considerati siano fatti per $x \to x_0$.

Teorema 1.2 (principio di sostituzione degli infinitesimi)**.** *Siano $f_1, f_2, g_1, g_2 : A \to \mathbb{R}$ quattro funzioni. Supponiamo che g_1 sia un un infinitesimo di ordine superiore a f_1 e che g_2 sia un un infinitesimo di ordine superiore a f_2. Allora*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

nel senso che uno dei due limiti scritti sopra esiste se e solo se esiste l'altro e in tal caso sono eguali.

Teorema 1.3 (principio di sostituzione degli infiniti)**.** *Siano $f_1, f_2, g_1, g_2 : A \to \mathbb{R}$ quattro funzioni. Supponiamo che f_1 sia un un infinito di ordine superiore a g_1 e che f_2 sia un un infinito di ordine superiore a g_2. Allora*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

nel senso che uno dei due limiti scritti sopra esiste se e solo se esiste l'altro e in tal caso sono eguali.

I teoremi sopra dicono che *si possono trascurare gli infinitesimi di ordine superiore o gli infiniti di ordine inferiore.*
Nel seguito consideriamo solo gli infinitesimi; il caso degli infiniti si può ricostrire con ragionamenti analoghi.

Introduciamo ora alcune notazioni e definizioni che semplificano il trattamento degli infinitesimi. Ricordiamo che tutto ciò che segue dipende dal punto x_0 rispetto a cui si fa il limite e che, come abbiamo detto prima, verrà spesso sottinteso.

Definizione 1.4. *Siano f e g due funzioni. Diciamo che f e g sono asintotiche se $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ per x vicino a x_0 e se* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
È immediato verificare che

$$f \text{ asintotica a } g \Leftrightarrow g \text{ asintotica a } f.$$

In tal caso scriviamo $f(x) \approx g(x)$.

Diremo, a volte, che f e g hanno lo stesso ordine *se* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ *per un qualche l finito e diverso da zero.*

Definizione 1.5. *Sia g una funzione tale che $g(x) \neq 0$ per x vicino a x_0.*
*Indichiamo con $o(g)$ (*o piccolo di *(g)) l'insieme di tutte le funzioni di ordine superiore a g, cioè*

$$o(g) := \left\{ f : \frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \right\}$$

*Indichiamo con $O(g)$ (*o grande di *(g)) l'insieme*

$$O(g) := \left\{ f : \frac{f(x)}{g(x)} \text{ è limitata vicino a } x_0 \right\}$$

In questo modo per indicare che una funzione f è di ordine superiore a g si può scrivere $f \in o(g)$; in realtà si utilizza di solito la scrittura più agile (anche se impropria):

$$f = o(g)$$

che si legge "f è un o piccolo di g".
Analogamente la scrittura

$$f = O(g),$$

che si legge "f è un o grande di g", significa $f \in O(g)$, cioè $\frac{f(x)}{g(x)}$ è limitata per x vicino a x_0.
Notiamo che nelle scritture ora introdotte il segno $=$ è usato impropriamente (infatti sta per $\in$). Per esempio si scrive $f = o(g)$, ma non si può scrivere $o(g) = f$; oppure da $f_1 = o(g)$ e $f_2 = o(g)$ NON si può dedurre $f_1 = f_2$.

Osservazione 1.6. *Nel seguito useremo le seguenti notazioni:*

$$f + o(g) := \{f + f_1 : f_1 \in o(g)\} \qquad f\, o(g) := \{f f_1 : f_1 \in o(g)\}$$

e $f + O(g)$, $f\,O(g)$ che si definiscono in modo analogo. Similmente:

$$o(g_1) + o(g_2) := \{f_1 + f_2 : f_1 \in o(g_1), f_2 \in o(g_2)\}$$
$$o(g_1)\, o(g_2) := \{f_1 f_2 : f_1 \in o(g_1), f_2 \in o(g_2)\}$$

e in maniera analoga si definiscono gli insiemi $o(g_1) + O(g_2)$, $O(g_1) + O(g_2)$, $o(g_1)\,O(g_2)$, $O(g_1)\,O(g_2)$. Infine, se $\mathcal{G}$ è un qualunque insieme di funzioni definite in A

$$o(\mathcal{G}) := \{f : \exists g \in \mathcal{G} \text{ con } f_1 = o(g)\}, \; O(\mathcal{G}) := \{f : \exists g \in \mathcal{G} \text{ con } f_1 = O(g)\};$$

quest'ultima scrittura ci autorizza a scrivere espressioni come $o(f + o(g))$, $o(f + O(g))$, $O(f + o(g))$ e $O(f + O(g))$ (dove f può anche essere 0). Per esempio $o(O(g)) = \{f : f = o(f_1) \text{ per una } f_1 \text{ con } f_1 = O(g)\}$.

Elenchiamo ora vari collegamenti tra le nozioni sopra introdotte. Le dimostrazioni sono elementari (basta applicare le definizioni).

Proposizione 1.7. *Siano f e g due funzioni diverse da zero per x vicino a x_0. Allora*

- *$f \approx g \Rightarrow f$ e g hanno lo stesso ordine $\Rightarrow f = O(g)$;*
- *$f \approx g \Leftrightarrow f = g + o(g) \Leftrightarrow f = g\,(1 + o(1))$.*

Proposizione 1.8. *Siano f, g, f_1, g_1, f_2 e g_2 funzioni con g, g_1 e g_2 diverse da zero per x vicino a x_0. Allora*

- *se $f = O(g)$, allora $f = o(g)$;*
- *se $f_1 = o(g)$ e $f_2 = o(g)$ allora $f_1 + f_2 = o(g)$;*
- *se $f_1 = o(g)$ e $f_2 = O(g)$ allora $f_1 + f_2 = O(g)$;*
- *se $f_1 = O(g)$ e $f_2 = O(g)$ allora $f_1 + f_2 = O(g)$;*
- *se $f_1 = o(g_1)$ e $f_2 = o(g_2)$ allora $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$;*
- *se $f_1 = O(g_1)$ e $f_2 = o(g_2)$ allora $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$;*
- *se $f_1 = O(g_1)$ e $f_2 = O(g_2)$ allora $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$;*
- *se $f = o(g_1)$ e $g_1 = o(g)$ allora $f = o(g)$;*
- *se $f = o(g_1)$ e $g_1 = O(g)$ allora $f = o(g)$;*
- *se $f = O(g_1)$ e $g_1 = o(g)$ allora $f = o(g)$;*
- *se $f = O(g_1)$ e $g_1 = O(g)$ allora $f = O(g)$.*

Osservazione 1.9. *Solitamente la proposizione sopra si schematizza come segue (di nuovo gli $=$ sono usati in maniera impropria; stavolta andrebbero scritti dei simboli di inclusione $\subset$).*

- *$o(g) = O(g)$;*
- *$o(g) + o(g) = o(g)$;*
- *$o(g) + O(g) = O(g)$;*
- *$O(g) + O(g) = O(g)$;*
- *$o(g_1)o(g_2) = o(g_1 g_2)$;*
- *$o(g_1)O(g_2) = o(g_1 g_2)$;*

- $O(g_1)O(g_2) = O(g_1 g_2)$;
- $o(o(g)) = o(g)$;
- $o(O(g)) = o(g)$;
- $O(o(g)) = o(g)$;
- $O(O(g)) = O(g)$.

In particolare si ha un fatto che risulta frequentemente utile:

$$o(g + o(g)) = o(O(g)) = o(g).$$

Notiamo anche che dalle regole sul prodotto seguono anche delle regole sul quoziente, ammesso che quest'ultimo abbia senso. Si può per esempio affermare che, se $f \neq 0$ in un intorno di x_0, allora

$$\frac{o(g)}{f} = o\left(\frac{g}{f}\right), \quad \frac{O(g)}{f} = O\left(\frac{g}{f}\right).$$

Le nozioni ora introdotte possono essere molto utile nel calcolo dei limiti, purchè si conoscano gli ordini di infinitesimo delle quantità che formano il limite che si vuole calcolare. In questo senso risulta determinante la conoscenza degli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari. Ricordiamo tali sviluppi nel punto $x_=0$.

Proposizione 1.10. *Si ha:*

- $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$;
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$;
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$;
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$;
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$, *per un qualunque α reale; se conveniamo di porre*

  $$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \textit{(detto il } \text{binomiale di } \alpha \text{ su } k\textit{)},$$

  allora l'ultima formula si può scrivere

  $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n);$$

tale formula generalizza la formula del binomio di Newton: non è difficile verificare infatti che, se α è intero positivo, diciamo $\alpha = n_0$, allora

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \binom{n_0}{k} & \textit{se } k \leq n_0 \\ 0 & \textit{se } k > n_0; \end{cases}$$

se invece α non è un intero positivo tutti i suoi binomiali sono diversi da zero, e quindi la formula non è mai esatta.

Esempio 1.11. *Supponiamo di avere una quantità f di cui sappiamo che $f(x) = (x + 3x^2 + o(x^2))^2$; ci chiediamo se si riesce a dire qualcosa di più esplicito su f. La cosa più immediata è di calcolare esplicitamente il quadrato:*

$$f(x) = x^2 + 9x^4 + o(x^2)^2 + 6x^3 + 2xo(x^2) + 6x^2o(x^2).$$

Per quanto detto prima:

$$\begin{aligned} o(x^2)^2 &= o(x^2)o(x^2) = o(x^2x^2) = o(x^4), \\ 2xo(x^2) &= O(x)o(x^2) = o(xx^2) = o(x^3), \\ 6x^2o(x^2) &= O(x^2)o(x^2) = o(x^2x^2) = o(x^4), \end{aligned}$$

e quindi $f(x) = x^2+6x^3+o(x^3)+9x^4+o(x^4)+o(x^4) = x^2+6x^3+o(x^3)+9x^4+o(x^4)$ (dato che $o(x^4)+o(x^4) = o(x^4)$). Notiamo a questo punto che $9x^4 = o(x^3)$ e anche $o(x^4) = o(x^3)$ (per questa seconda relazione ricordiamo che il segno di eguale indica in realtà un'inclusione): questo ci dice che i termini $9x^4$ e $o(x^4)$ NON SONO SIGNIFICATIVI rispetto a $o(x^3)$. Tutto quello che possiamo scrivere è allora

$$f(x) = x^2 + 6x^3 + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) = \boxed{x^2 + 6x^3 + o(x^3)}.$$

Mostriamo un altro modo (più generale) di trovare lo stesso risultato. Si ha:

$$f(x) = (x + 3x^2 + o(x^2))^2 = x^2 \left(1 + 3x + \frac{o(x^2)}{x}\right)^2 = x^2(1 + 3x + o(x))^2.$$

Usando lo sviluppo di $(1 + y)^2 = 1 + 2y + o(y)$ (che in questo caso si deduce subito facendo il quadrato), si ha:

$$\begin{aligned} f(x) = x^2[1 + 2(3x + o(x)) + o(3x + o(x))] &= x^2[1 + 6x + 2o(x) + o(O(x))] = \\ x^2[1 + 6x + o(x) + o(x)] &= x^2[1 + 6x + o(x)] = x^2 + 6x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ritrovato lo stesso risultato. Per mostrare che la seconda tecnica è più efficiente consideriamo il caso $f(x) = (x + 3x^2 + o(x^2))^5$. Nessuno proibisce di calcolare la quinta potenza di $x + 3x^2 + o(x^2)$ e di buttare via tutti i termini che risultino di ordine superiore a qualcun altro - la cosa però si presenta laboriosa. Se invece scriviamo

$$f(x) = (x + 3x^2 + o(x^2))^5 = x^5 \left(1 + 3x + \frac{o(x^2)}{x}\right)^5 = x^5(1 + 3x + o(x))^5.$$

e usiamo lo sviluppo $(1+y)^5 = 1+5y+o(y)$ *otteniamo*

$$f(x) = x^5[1+5(3x+o(x))+o(3x+o(x))] = x^5[1+15x+5o(x)+o(O(x))] = x^5[1+15x+o(x)] = \boxed{x^5+15x^6+o(x^6)}.$$

Vediamo un esempio più complicato. Sia $f(x) = (x-x^2+2x^3+o(x^3))^4$*; allora*

$$f(x) = x^4\left(1-x+2x^2+\frac{o(x^3)}{x}\right)^4 = x^4\left(1-x+2x^2+o(x^2)\right)^4.$$

Dato che $(1+y)^4 = 1+4y+o(y)$ *si ha:*

$$f(x) = x^4[1+4(-x+2x^2+o(x^2))+o(-x+2x^2+o(x^2))] = x^4[1-4x+8x^2+o(x^2)+o(O(x))] = x^4[1-4x+8x^2+o(x^2)+o(x)] = x^4[1-4x+o(x)] = \boxed{x^4-4x^5+o(x^5)}.$$

Notiamo che (come nel primo esempio) il termine $8x^2$ *non è significativo di fronte a* $o(x)$*. In realtà in questo caso possiamo trovare di meglio, ma dobbiamo sfruttare di più il termine* $(1+y)^4$*. In effetti, dato che* $(1+y)^4 = 1+4y+6y^2+o(y^2)$*, possiamo scrivere*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4[1+4(-x+2x^2+o(x^2))+6(-x+2x^2+o(x^2))^2+o((-x+2x^2+o(x^2))^2)] = \\ &x^4[1+4(-x+2x^2+o(x^2))+6(-x+o(x))^2+o(O(x))^2)] = \\ &x^4[1-4x+8x^2+o(x^2)+6x^2(1+o(1))^2+o(x^2)] = \\ &x^4[1-4x+8x^2+o(x^2)+6x^2(1+o(1))+o(x^2)] = \\ &x^4[1-4x+8x^2+o(x^2)+6x^2+o(x^2)+o(x^2)] = \\ &x^4[1-4x+14x^2+o(x^2)] = \boxed{x^4-4x^5+8x^6+o(x^6)} \end{aligned}$$

Esempio 1.12. *Cerchiamo di calcolare lo sviluppo della funzione* $f(x) = \tan(x)$ *al quinto ordine, senza eseguire le derivate, ma utilizzando quanto sappiamo sugli* *sviluppi del seno e del coseno di x. Si ha:*

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} =$$

$$x\left(\frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}\right) = x + x\left(\frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} - 1\right) =$$

$$x + x\left(\frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}\right) =$$

$$x + x\left(\frac{\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}\right) = x + \frac{x^3}{3}\left(\frac{1 - \frac{x^2}{10} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}\right) =$$

$$x + \frac{x^3}{3}\left(\frac{1 - \frac{x^2}{10} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3}\left(\frac{1 - \frac{x^2}{10} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - 1\right) =$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3}\left(\frac{\frac{2x^2}{5} + o(x^2)}{1 + o(1)}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\left(\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}\right) =$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}(1 + o(1)) = \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)}$$

Un altro modo, forse leggermente più semplice, è di utilizzare lo sviluppo $(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 + o(y^2)$. Allora, usando $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, e scartando via via dei termini:

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \times$$

$$\left(1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o\left(O(x^2)^2\right)\right) =$$

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) + \frac{x^4}{4}(1 + o(1))^2 + o(x^4)\right) =$$

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) =$$

$$x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} + o(x^5) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + o(x^5) + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)}$$