Alcuni esercizi sulle equazioni differenziali

Claudio Saccon

20 gennaio 2014

Alcuni fatti utili per gli studi qualitativi.

Supponiamo nel seguito che $y :]\underline{x}, \overline{x}[\to \mathbb{R}$ sia una soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

dove $x_0 \in]\underline{x}, \overline{x}[$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ e $]\underline{x}, \overline{x}[$ è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

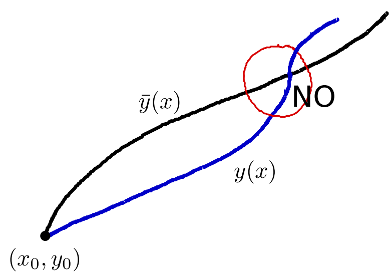
- Supponiamo di avere una $F_1(x, y)$ tale che $F(x, y(x)) \leq F_1(x, y(x))$ per le $x \in]a, b[$, dove $]a, b[$ è un sottointervallo di $]\underline{x}, \overline{x}[$ contenente x_0 (F_1 potrebbe anche coincidere con F).

  Supponiamo inoltre che $\bar{y} :]a, b[\to \mathbb{R}$ verifichi:

  $$\begin{cases} \bar{y}'(x) > F_1(x, \bar{y}(x)), \\ \bar{y}(x_0) = y_0, \end{cases}$$

  allora:

  $$\begin{aligned} &\bar{y}(x) > y(x) \text{ per } x \in]x_0, b[\qquad (\bar{y} \text{ è una “barriera superiore a destra”}), \\ &\bar{y}(x) < y(x) \text{ per } x \in]a, x_0[\qquad (\bar{y} \text{ è una “barriera inferiore a sinistra”}). \end{aligned}$$

  Vediamo per esempio la prima. Dato che $y(x_0) = y_0 = \bar{y}(x_0)$ e $y'(x_0) = F(x_0, y_0) \leq F_1(x, y(x_0)) < \bar{y}'(x_0)$, allora in un intorno destro di x_0 si ha $y(x) < \bar{y}(x)$. Ammettiamo per assurdo che ci sia $x \in]x_0, b[$ tale che $y(x) \geq \bar{y}(x)$. Allora per continuità troviamo $x_1 \in]x_0, b[$ con $y(x_1) = \bar{y}(x_1)$ e $y(x) < \bar{y}(x)$ per $x \in]x_0, x_1[$. Ne segue $y'(x_1) = F(x_1, y(x_1)) \leq F_1(x, y(x_1)) = F_1(x_1, \bar{y}(x_1)) < \bar{y}'(x_1)$, da cui $y(x) > \bar{y}(x)$ per le x in un intorno sinistro di x_1, che è assurdo.

- Viceversa supponiamo che $F(x, y(x)) \geq F_1(x, y(x))$ per le $x \in]a, b[$ e che $\bar{y} :]a, b[\to \mathbb{R}$ verifichi:

  $$\begin{cases} \bar{y}'(x) < F(x, \bar{y}(x)), \\ \bar{y}(x_0) = y_0, \end{cases}$$

allora:

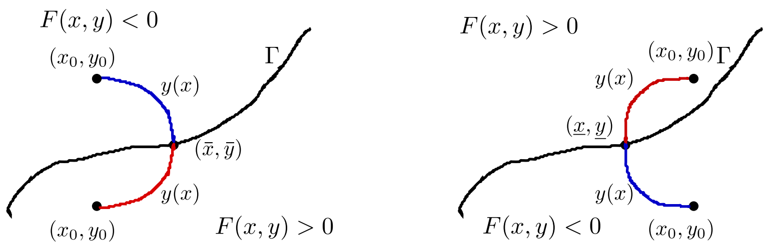
$$\bar{y}(x) < y(x) \text{ per } x \in]x_0, b[\qquad (\bar{y} \text{ è una “barriera inferiore a destra”})$$
$$\bar{y}(x) > y(x) \text{ per } x \in]a, x_0[\qquad (\bar{y} \text{ è una “barriera superiore a sinistra”})$$

- Supponiamo che ci sia una curva Γ di equazione $y = g(x)$, con $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabile, tale che, se $(\tilde{x}, \tilde{y})$ sta sulla curva (cioè $\tilde{y} = g(\tilde{x})$), allora:

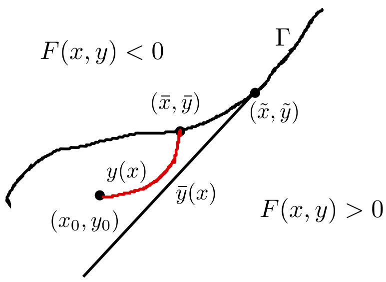
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y}) \\ y<g(x)}} F(x, y) = +\infty \quad (\text{oppure } -\infty).$$

Allora per (x_0, y_0) sufficientemente vicino a Γ e sotto Γ (cioè $y_0 < g(x_0)$), si ha $\overline{x} < +\infty$ e $\lim_{x\to\bar{x}^-} (x, y(x)) = (\bar{x}, g(\bar{x}))$ (rispettivamente $-\infty < \underline{x}$ e $\lim_{x\to\underline{x}^-} (x, y(x)) = (\underline{x}, g(\underline{x})))$ – la soluzione $y(x)$ che parte da (x_0, y_0) “va a finire” su Γ per $x \to \bar{x}^-$ (rispettivamente per $x \to \underline{x}^+$).

Analoghi risultati si ottengo partendo sopra la curva Γ.



Per dimostrarlo (prendiamo il caso in cui si parte da sotto con $F(x, y) \to +\infty$) prendiamo $(\tilde{x}, \tilde{y})$ su Γ e consideriamo una retta $\bar{y}(x) = \tilde{y} + m(x - \tilde{x})$ passante per $(\tilde{x}, \tilde{y})$ e con coefficiente angolare $m > g'(\tilde{x})$. La scelta di m fa sì che $\bar{y}(x) < g(x)$ per $x < \tilde{x}$, x vicino a $\tilde{x}$, inoltre $F(x, \bar{y}(x)) \to +\infty$ se $x \to \tilde{x}^-$ e quindi $\bar{y}'(x) < F(x, \bar{y}(x))$ se $x < \tilde{x}$, x è sufficientemente vicino a $\tilde{x}$. Ne segue che $\bar{y}$ è una “barriera inferiore sinistra”. Ma allora, scegliendo (x_0, y_0) tra Γ e il grafico di $\bar{y}$ ($x_0 < \tilde{x}$, x_0 vicino a $\tilde{x}$), si ha che la soluzione $y(x)$ che parte da (x_0, y_0), dovendo restare sopra $\bar{y}$, non può che andare a intersecare Γ (in un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ con $\bar{x} < \tilde{x}$).



Notiamo che, in tutti i casi descritti, la derivata $y'(x)$ diverge quando $y(x)$ tende a intersecare Γ.

- Se

$$\lim_{\substack{x\to\overline{x}^- \\ y\to+\infty}} \frac{F(x, y)}{y} = l \in \mathbb{R} \qquad \left(\lim_{\substack{x\to\overline{x}^- \\ y\to-\infty}} \frac{F(x, y)}{y} = l \in \mathbb{R} \right)$$

allora $y(x)$ non può tendere a $+\infty$ ($-\infty$) per $x \to \overline{x}^-$. Analogamente se

$$\lim_{\substack{x\to\underline{x}^+ \\ y\to+\infty}} \frac{F(x, y)}{y} = l \in \mathbb{R} \qquad \left(\lim_{\substack{x\to\underline{x}^+ \\ y\to-\infty}} \frac{F(x, y)}{y} = l \in \mathbb{R} \right)$$

allora $y(x)$ non può tendere a $+\infty$ $(-\infty)$ per $x \to \underline{x}^+$.

Il motivo per cui questo non può accadere è stato fatto a lezione, mostrando che, se $\dfrac{F(x,y)}{y}$ è limitata, allora $|y(x)| \leq e^{Kx}$, per un'opportuna K, e quindi non può esplodere in tempo finito.

In particolare se

$$\lim_{\substack{x\to\overline{x}^-\\ y\to+\infty}} F(x,y) = l \in \mathbb{R} \qquad \left(\lim_{\substack{x\to\overline{x}^-\\ y\to-\infty}} F(x,y) = l \in \mathbb{R}\right)$$

allora $y(x)$ non può tendere a $+\infty$ $(-\infty)$ per $x \to \overline{x}^-$. Analogamente se

$$\lim_{\substack{x\to\underline{x}^+\\ y\to+\infty}} F(x,y) = l \in \mathbb{R} \qquad \left(\lim_{\substack{x\to\underline{x}^+\\ y\to-\infty}} F(x,y) = l \in \mathbb{R}\right)$$

allora $y(x)$ non può tendere a $+\infty$ $(-\infty)$ per $x \to \underline{x}^+$.

- Se $\overline{x} = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} y(x) = l \in \mathbb{R}$ e se

$$\text{esiste} \quad m := \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to l}} F(x,y),$$

allora necessariamente $m = 0$. Analogamente, se $\underline{x} = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} y(x) = l \in \mathbb{R}$ e se

$$\text{esiste} \quad m := \lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to l}} F(x,y),$$

allora necessariamente $m = 0$.

Infatti è ben noto che se $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = m > 0$ $(= m < 0)$, allora $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ $(= -\infty)$; discorso analogo quando $x \to -\infty$.

Esercizi

Si studino le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili. In particolare, per ognuno degli esercizi, si indichi l'insieme dei dati iniziali (x_0, y_0) per cui vale il teorema di esistenza locale, l'insieme dei dati iniziali per cui c'è l'unicità, si individuino le zone del piano cartesiano per cui la soluzione è crescente (o decrescente). Si rappresentino graficamente queste informazioni (disegnado due assi cartesiani e gli insiemi detti sopra). Si utilizzi inoltre il metodo risolutivo per queste equazioni per individuare gli intervalli massimali di esistenza delle soluzioni e l'andamento delle soluzioni agli estremi di questi intervalli.

$$y' = \frac{\ln(2x}{2x}\frac{\sqrt{2-e^y}}{e^y} \tag{a}$$

$$y' = \frac{e^{2y}}{4+x^2} \tag{b}$$

$$y' = \frac{e^y}{(1+4y^2)(1+4x^2)} \tag{c}$$

$$y' = \frac{\ln(2x}{2x}\frac{\sqrt{2-e^y}}{e^y} \tag{d}$$

$$y' = \frac{1+4y^2}{x^2} \tag{e}$$

$$y' = \frac{e^y}{(1-y)(1+x)} \tag{f}$$

1. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x^2 - y^2}, \\ \bar{y}(x_0) = y_0. \end{cases}$$

   (a) si dica per quali (x_0, y_0) si può applicare il Teorema di Cauchy (di esistenza locale);

   (b) si dica se esistono soluzioni costanti;

   (c) si individuino le zone del piano (x, y) in cui le soluzioni sono crescenti (decrescenti);

   (d) si dica se ci sono (x_0, y_0) per cui l'estremo massimale destro $\bar{x}$ $(> x_0)$ è finito;

   (e) si dica se ci sono (x_0, y_0) per cui l'estremo massimale destro $\bar{x}$ è finito e $\lim\limits_{x \to \bar{x}^+} y(x) = +\infty$;

   (f) si dica se ci sono (x_0, y_0) per cui l'estremo massimale sinistro $\underline{x}$ è finito e $\lim\limits_{x \to \underline{x}^-} y(x) = +\infty$;

   (g) (*) si dica se per qualche (x_0, y_0) la soluzione è definita su $[x_0, +\infty[$; suggerimento: si cerchi di dimostrare che la curva $\bar{y}(x) = x/2$ è una barriera superiore; su $[1, +\infty[$;

   (h) (*) sfruttando il punto precedente si dica se esistono (x_0, y_0) per cui la corrispondente soluzione $y(x)$ ha limite finito per $x \to +\infty$; suggerimento: si confronti (per x grande) la $y(x)$ con una soluzione dell'equazione $\bar{y}' = \dfrac{\bar{y}}{x^2}$.

2. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{yx^2}{y - 2x^2}, \\ \bar{y}(x_0) = y_0. \end{cases}$$

   Rispondere ai quesiti (a), (b), (c) indicati nel primo esercizio. Inoltre

   (d) Si dica se può verificarsi "l'esplosione in tempo finito", cioè se può succedere $\overline{x} < +\infty$ e $\lim\limits_{x \to \overline{x}^-} |y(x)| = +\infty$, oppure $\underline{x} < +\infty$ e $\lim\limits_{x \to \underline{x}^+} |y(x)| = +\infty$.

   (e) Dire se, per qualche (x_0, y_0) si ha $\bar{x} = +\infty$ e in tal caso si dica a cosa tende $y(x)$ per $x \to +\infty$.

   (f) (*) Disegnare la soluzione con $(x_0, y_0) = (-2, 6)$; suggerimento: sfruttare il fatto che la retta $\bar{y}(x) := -12x - 18$ è una barriera inferiore sinistra (possibilmente dimostrandolo, se ci si riesce) per capire cosa succede per $x < x_0$.

3. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \ln(y^2 - x), \\ \bar{y}(x_0) = y_0. \end{cases}$$

   Rispondere ai quesiti (a), (b), (c) indicati nel primo esercizio. Inoltre

   (d) Dire qual è il tempo massimale destro $\bar{x}$, quando $x_0 \geq -1$ e $y_0 \leq 0$.

   (e) Dire qual è il tempo massimale sinistro $\underline{x}$ quando $x_0 \leq -1$.

(f) Dire se esistono punti iniziali $(0, y_0)$ con $y_0 > 0$ per cui $\overline{x} = +\infty$. In caso di risposta affermativa qual è il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$? Suggerimento: si cerchi di far vedere che $\bar{y} = x/4 + 2$ è una barriera inferiore per $x \geq 0$.

4. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y-1}{xy-1}, \\ \bar{y}(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Rispondere ai quesiti (a), (b), (c) indicati nel primo esercizio. Inoltre

(d) Dire qual è il tempo massimale destro $\bar{x}$ nel caso $x_0 = -1$ e $y_0 > 1$; trovare inoltre, in questo caso, $\lim_{x \to \bar{x}^-} y(x)$.

(e) Dire qual è il tempo massimale destro $\bar{x}$ nel caso $x_0 = -1$ e $y_0 < -1$; trovare inoltre, in questo caso, $\lim_{x \to \bar{x}^-} y(x)$.

(f) (*) Dire qual è il tempo massimale destro $\bar{x}$ nel caso $x_0 = 1$ e $y_0 > 1$; trovare inoltre, in questo caso, $\lim_{x \to \bar{x}^-} y(x)$. Suggerimento per trovare il limite di $y(x)$ si sfrutti il fatto che $\dfrac{y-1}{xy-1} \geq \dfrac{1}{x}\dfrac{y_0-1}{y_0}$.

5.

$$\begin{cases} y' = y \ln^3(x+y), \\ \bar{y}(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Rispondere ai quesiti (a), (b), (c) indicati nel primo esercizio. Inoltre

(d) Si dica qual è il tempo massimale sinistro $\underline{x}$ nel caso $x_0 = 0$ e $y_0 = 1/2$; trovare inoltre, in questo caso, $\lim_{x \to \underline{x}^+} y(x)$.

(e) (*) Se $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$ si dica se il tempo di esistenza massimale destro è finito o infinito. Suggerimento si confronti la soluzione $y(x)$ con la soluzione dell'equazione $z' = z\ln(z+1)$ con condizione iniziale $z(1) = 1$.

(f) Se $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ si trovi il tempo massimale destro $\overline{x}$ e $\lim_{x \to \overline{x}^+} y(x)$.

6.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y-1}{y-\ln(x)}, \\ \bar{y}(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Rispondere ai quesiti (a), (b), (c) indicati nel primo esercizio. Inoltre

(d) Se $x_0 = 3$ e $y_0 = 0$ si trovi il tempo massimale sinistro $\underline{x}$ e il $\lim_{x \to \underline{x}^+} y(x)$

(e) Sempre per $x_0 = 3$ e $y_0 = 0$ si trovi il tempo massimale destro $\overline{x}$ e (*) il $\lim_{x \to x^+} y(x)$. Suggerimento per il secondo punto: si confronti $y(x)$ con la soluzione $z(x)$ di $z' = \dfrac{z-1}{\ln(x)}$, con condizione $z(3) = 0$.

(f) Per $x_0 = 1/2$ e $y_0 = 0$ si trovi il tempo massimale sinistro.

(g) Dire se ci sono soluzioni $y(x)$ con $\overline{x} = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$ diverse dalla soluzione costante (suggerimento: si provi che la retta $r(x) = 2x$ è una barriera superiore destra se x è abbastanza grande).

7.
$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^y}{\sqrt{e^y - x}}, \\ \bar{y}(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Rispondere ai quesiti (a), (b), (c) indicati nel primo esercizio. Inoltre

(d) Trovare il tempo di esistenza massimale destro $\overline{x}$ e $\lim_{x \to \overline{x}^-} y(x)$.

(e) Se $(x_0, y_0) = (0, 0)$ si trovino il tempo di esistenza massimale sinistro $\underline{x}$ e $\lim_{x \to \underline{x}^+} y(x)$. Suggerimento per il limite: si cerchi di confrontare $y(x)$ con la soluzione $z(x)$ dell'equazione $z' = \dfrac{e^z}{\sqrt{1-x}}$ con la stezza condizione iniziale).

(f) (*) Si dica se c'è una soluzione con $\underline{x} = 0$ e in caso affermativo quanto fa $\lim_{x \to \underline{x}^+} y(x)$.

8.
$$\begin{cases} y' = \dfrac{ye^y}{\sqrt{e^{2y} + x^3}}, \\ \bar{y}(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Rispondere ai quesiti (a), (b), (c) indicati nel primo esercizio. Inoltre

(d) Dire quanto fa il tempo di esistenza massimale destro.

(e) (*) Disegnare la soluzione con $(x_0, y_0) = (-1, 2)$; suggerimento: per valutare il comportamento all'infinito si provi che la curva $r(x) := \dfrac{3}{2}\ln(x)$ è una barriera inferiore destra per $x \geq e$ e si sfrutti questa informazione.

(f) Se $(x_0, y_0) = (2, -1)$ trovare i tempi di esistenza massimale sinistro e destro.

(g) (*) Sempre se $(x_0, y_0) = (2, -1)$ dire se $\lim_{x \to \overline{x}^-} y(x)$ è finito o infinito, e disegnare la soluzione (suggerimento: per valutare il comportamento all'infinito si confronti $y(x)$ con la soluzione $z(z)$ dell'equazione $z' = \dfrac{z}{\sqrt{1+x^3}}$ con la stessa condizione iniziale).