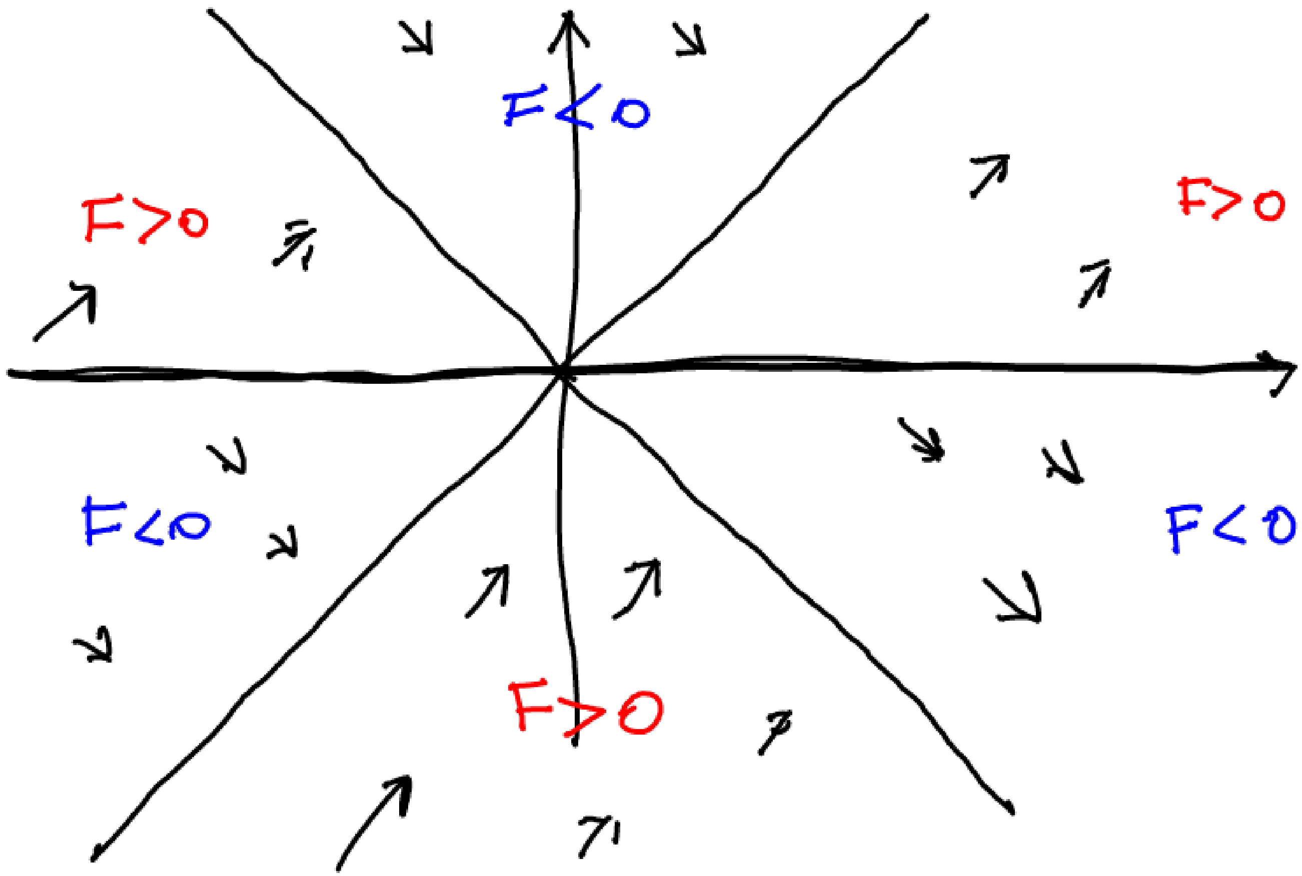
(1) $$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x^2-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(a) $F(x,y) = \dfrac{y}{x^2-y^2}$ è differenziabile se $x \neq \pm y$

e quindi il teorema di Cauchy vale se $x_0 \neq \pm y_0$

(b) c'è la soluzione costante $y(x) = 0$ ed è l'unica (infatti se $y(x) = c \Rightarrow y'(x) = 0 \Rightarrow$ $\dfrac{y(x)}{x^2-y^2(x)} = 0 \Rightarrow y(x) = 0$)

(c) Per determinare le zone di crescenza / decrescenza bisogna descrivere le zone in cui $F(x,y) = \frac{y}{x^2-y^2}$ è >0 / <0. È chiaro che il segno di $F(x,y)$ è quello descritto nel disegno sotto:

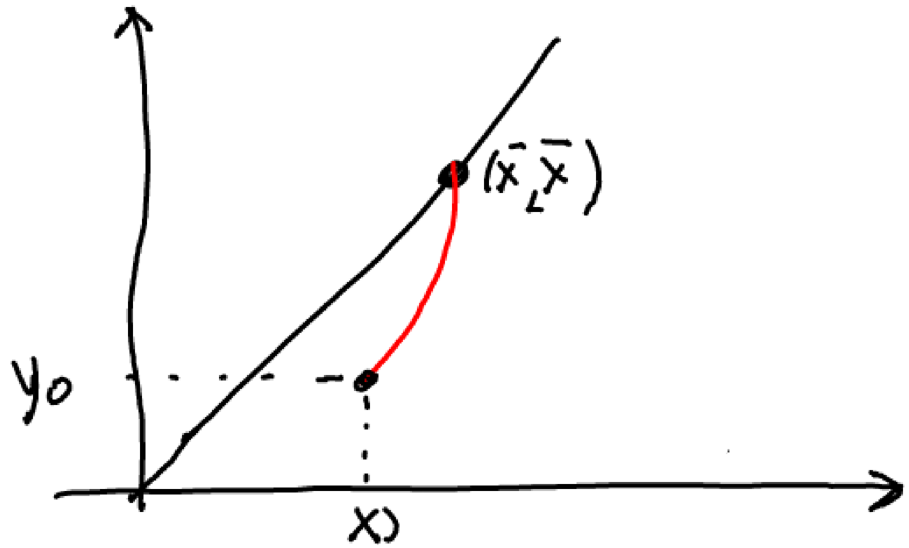


(d) È chiaro che, se $\bar{x} > 0$ allora

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{x}) \\ y<x}} F(x,y) = +\infty$$

e quindi, se (x_0, y_0) è vicino alla retta $y=x$ e sotto tale retta, deve essere $\bar{x} < +\infty$ e

$$\lim_{x\to\bar{x}} y(x) = \bar{x} \quad , \quad \lim_{x\to\bar{x}} y'(x) = +\infty .$$



Dunque <u>ci sono</u> dati iniziali (x_0, y_0) per cui $\bar{x} < +\infty$

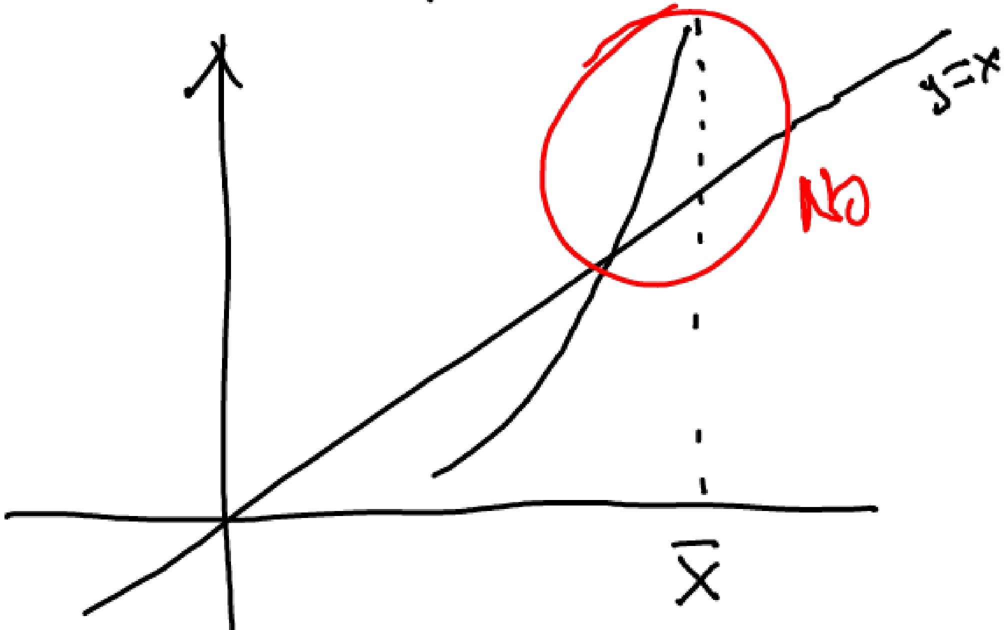
(e) <u>Non è possibile</u> che $x_0 < \bar{x} < +\infty$ e

$\lim_{x \to \bar{x}^-} y(x) = +\infty$. Se così fosse avremmo che

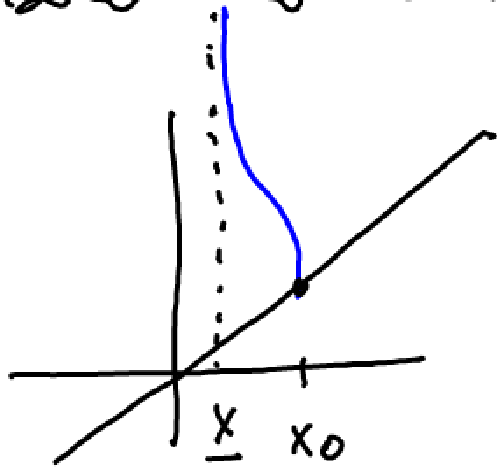
$y(x) > x$, per $x < \bar{x}$, x vicino a $\bar{x}$ e questo implicherebbe

$y'(x) = F(x, y(x)) < 0 \Rightarrow y(x)$ decrescente

(cosa che impedisce che $y(x) \to +\infty$)



(f) Non è possibile neanche che $-\infty < \underline{x} < x_0$ e $\lim_{x \to \underline{x}^-} y(x) = +\infty$. In effetti, guardando solo la crescenza/decrescenza questo <u>sarebbe possibile</u>



Però se $y(x) \to +\infty$ per $x \to \underline{x}^-$ si avrebbe:

$$F(x, y(x)) = \frac{y(x)}{x^2 - y^2(x)} = \frac{1}{\frac{x^2}{y(x)} - y(x)} \to \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

e $y(x)$ non può divergere in $\underline{x}$ se $y'(x) \to 0$ in $\underline{x}$.

(g) Come da suggerimento prendiamo $\overline{y}(x) = \frac{x}{2}$

Allora $\overline{y}'(x) = \frac{1}{2}$, mentre:

$$F(x,\bar{y}(x)) = \frac{\bar{y}(x)}{x^2 - \bar{y}(x)^2} = \frac{x/2}{x^2 - x^2/4} = \frac{2}{3}\frac{1}{x}$$

Per avere $\bar{y}' > F(x,\bar{y})$ bisogna dunque che

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}\frac{1}{x} \iff x > \frac{2}{3} \Longleftarrow x \geq 1$$

Quindi se $x_0 \geq 1$, la funzione $\bar{y}(x) = \frac{x}{2}$

è una "barriera superiore". Dunque, se $x_0 \geq 1$, $y_0 \leq x_0/2$

si ha $y(x) \leq \frac{x}{2}$.

In particolare, per tali (x_0, y_0), $\bar{X} = +\infty$.

(h) Come dal punto precedente prendiamo $x_0 \geq 1$ e

$0 < y_0 \leq \frac{x_0}{2}$. Sappiamo che $0 < y(x) \leq \frac{x}{2}$ e allora

$$F(x, y(x)) \leq \frac{y(x)}{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{4}{3}\frac{y(x)}{x^2}$$

Prendiamo come $\bar{y}$ la soluzione dell'eq. lineare omogenea

$$\bar{y}' = \frac{4}{3}\frac{y(x)}{x^2} \qquad \bar{y}(x_0) = y_0$$

che possiamo risolvere esplicitamente: $a(x) = \frac{4}{3}\frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{4}{3}\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{y}(x) = y_0\, e^{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right)}}$$

Dato che $\quad y'(x) = F(x, y(x)) \leq F_1(x, y(x))$,

$\bar{y}'(x) = F_1(x, \bar{y}(x)) \qquad$ e $y(x_0) = \bar{y}(x_0)$

si ricava $\quad y(x) \leq \bar{y}(x) \quad$ da cui

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) \leq \lim_{x\to+\infty} y_0\, e^{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}\right)} = y_0\, e^{\frac{4}{3}\frac{1}{x_0}} \in \mathbb{R}$$

(SI NOTI CHE IL LIMITE ESISTE PERCHÉ $y(x)$ è crescente)

(2) $\quad y' = \dfrac{y x^2}{y - 2x^2} = F(x, y)$

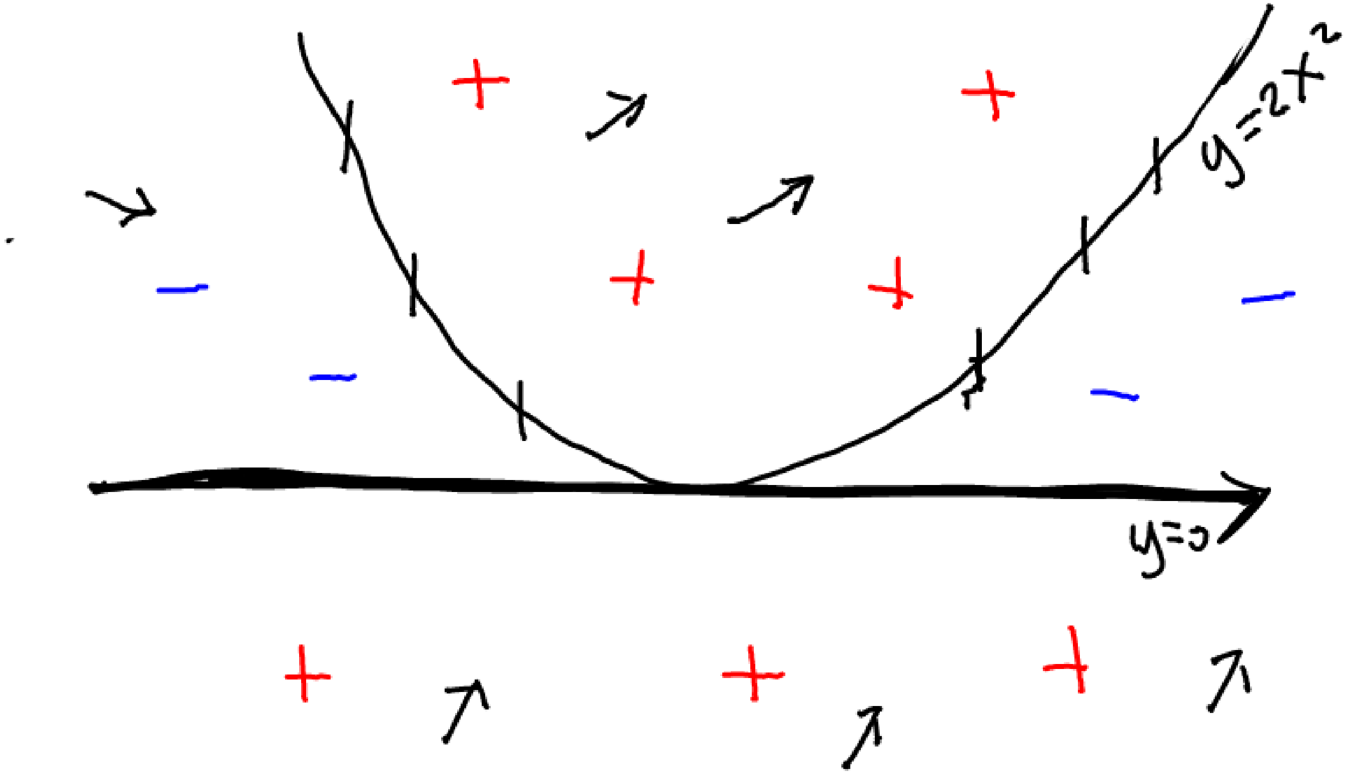
(a)(b)(c) La funzione F ha derivata $\frac{\partial}{\partial y} F$ continua in ogni punto (x, y) in cui $y - 2x^2 \neq 0$. Dunque $\Omega = \{ (x, y) : y = 2x^2 \}$ è l'insieme "di esistenza e unicità locale".

Chiaramente $y = 0$ è l'unica soluzione costante e il segno di $F(x, y)$ è come riportato di sotto

($F(x,y) > 0 \iff (y > 0 \text{ e}) \; y > 2x^2$

OPPURE

$y < 0 \; (\text{e } y < 2x^2)$



(Le curve $y(x)$ arrivano sulla parabola $y=2x^2$ con tangente verticale).

(d) L'esplosione in tempo finito NON può verificarsi.
Infatti supponiamo che si abbia (per esempio)

$$\lim_{x \to \bar{x}^-} y(x) = +\infty$$

Perciò

$$\lim_{\substack{x\to\bar{x}^-\\ y\to+\infty}} F(x,y) = \lim_{\substack{x\to\bar{x}^-\\ y\to+\infty}} \frac{y\,x^2}{y-2x^2} = 1$$

DA CUI $\lim_{x\to\bar{x}} y'(x) = 1$

e questo è in contrasto con $\lim_{x\to\bar{x}} y(x) = +\infty$

(e) Partiamo per esempio da un punto (x_0, y_0) con $y_0 < 0$. Dal segno di $F(x,y)$ si ricava che $y(x)$ è crescente. Però $y(x)$ <u>non</u> può mai intersecare la soluzione costante $\bar{y}(x) = 0$

$\Longrightarrow$ $y(x)$ esiste $\forall\, x \geq x_0$. Inoltre, per monotonia

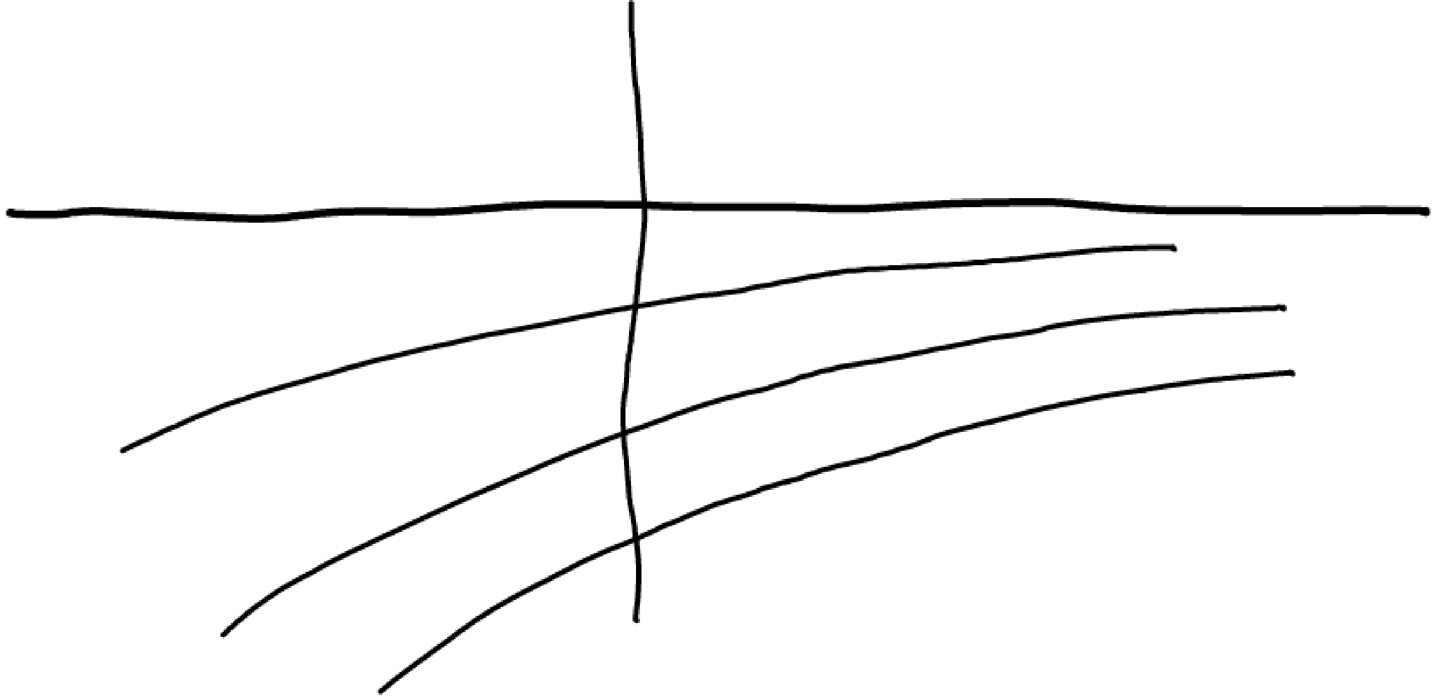
$$\exists \ \ell = \lim_{x \to +\infty} y(x) \quad \text{e} \quad \ell \leq 0.$$

Dico che $\ell = 0$. Infatti:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to \ell}} F(x, y) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to \ell}} \frac{y x^2}{y - 2x^2} = -\frac{\ell}{2}$$

Se $\ell \neq 0$ allora $y'(x) \to -\frac{\ell}{2} \neq 0$ e questo non va d'accordo con $y(x) \to \ell \in \mathbb{R}$

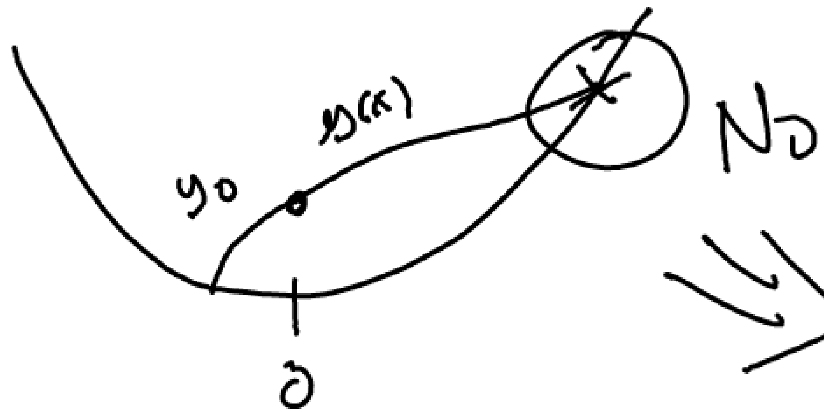
DUNQUE $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$ (per tutti gli (x_0, y_0) con $y_0 < 0$).

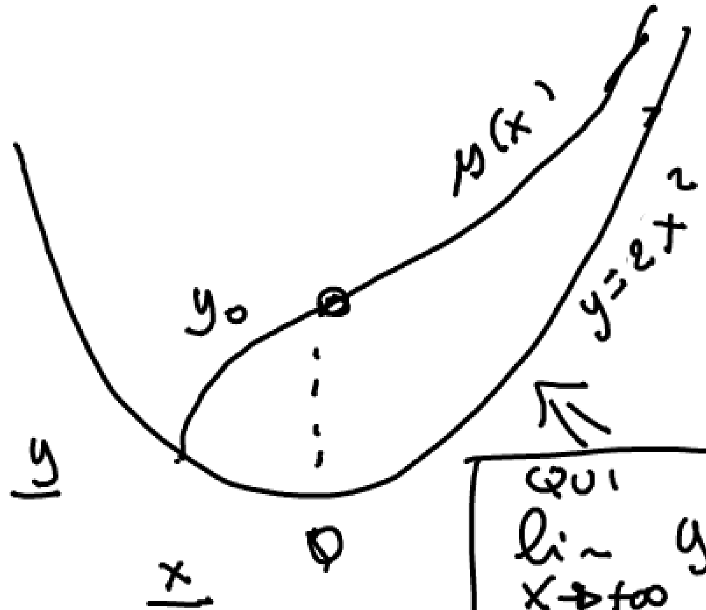


<u>NOTA</u>. Si può anche dedurre che, sempre per $y_0 < 0$, $y(x)$ è definita per tutte le $x < x_0$

Inoltre, essendo crescente, $y(x) \to l_1$ per $x \to -\infty$. Ragionando come prima si vede che l_1 <u>non può</u> $\in]-\infty, 0[$. Ma non può essere zero perché $l_1 \leq y_0 < 0$ e quindi $\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$.

UN ALTRO CASO IN CUI il tempo massimale destro è $+\infty$ è quello $x_0 = 0$, $y_0 > 0$. Infatti, in questo caso $y(x)$ è crescente fino a quando non raggiunge la parabola $y = 2x^2$ MA NON PUÒ mai raggiungerla perché se la facesse dovrebbe avere derivata $+\infty$ nel punto di incrocio.

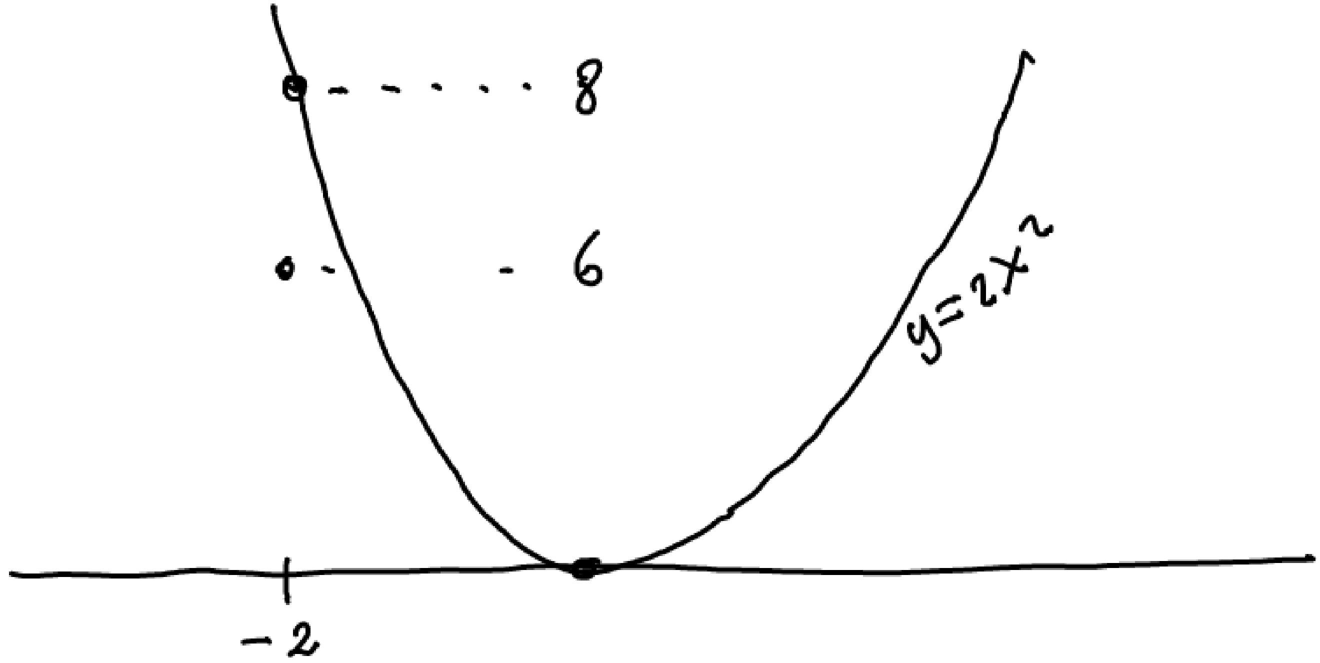




QUI $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$

Viceversa $\exists\ \underline{x} < 0$ tale che $y(x) \to \underline{y}$ per $x \to \underline{x}^+$ e $\underline{y} = \underline{x}^2$

(f)



Il punto $(-2, 6)$ è sotto la parabola $y=2x^2$. Dunque $y(x)$ è decrescente fino a quando rimane sotto.
Siano $\underline{x} < -2 < \overline{x}$ i tempi massimali.
Dico che $\overline{x} = 0$. Se infatti $\overline{x} < 0$ allora $y(x) \to \overline{y}$ per $x \to \overline{x}$, con $(\overline{x}, \overline{y})$ sulla parabola. Ma allora

$$\lim_{x \to \overline{x}} y'(x) = +\infty$$

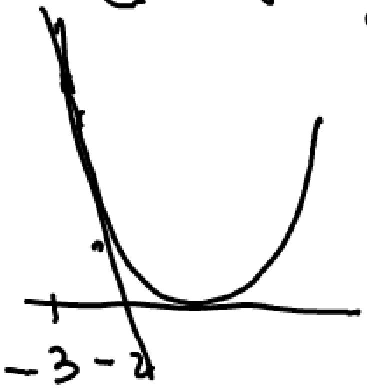
e quest

ma è possibile se $y'(x) \leq 0$.

DUNQUE $y(x)$ è definita fino a $x=0$ e, dovendo stare tra la parabola e l'asse delle x, si ha:

$$\lim_{x \to 0^-} y(x) = 0$$

Consideriamo ora $r(x) = -12x - 18$. Notiamo che $r(-2) = 6$ (cioè $(-2,6)$ sta sulla retta) e che r è tangente alla parabola in $(-3, 18)$



Calcoliamo

$F(x, r(x)) - r'(x) =$

$$\frac{(-12x-18)x^2}{-12x-18-2x^2}+12=$$

$$\frac{-12x^3-18x^2-12(2x^2+12x+18)}{-2(x+3)^2}=$$

$$\frac{6}{2(x+3)^2}\left(2x^3+7x^2+24x+36\right)=\frac{3}{2}\,\frac{(x+2)(2x^2+3x+18)}{(x+3)^2}$$

$x=-2$ è una radice

$-16+28-48+36=0$

DIVIDENDO

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & 7 & 24 & 36 \\
-2 & & -4 & -6 & -36 \\
\hline
 & 2 & 3 & 18 & 0
\end{array}$$

$2x^2+3x+18$ ha $\Delta<0$

DUNQUE $F(x, r(x)) < 0$ se $x \in]-3,-2[$

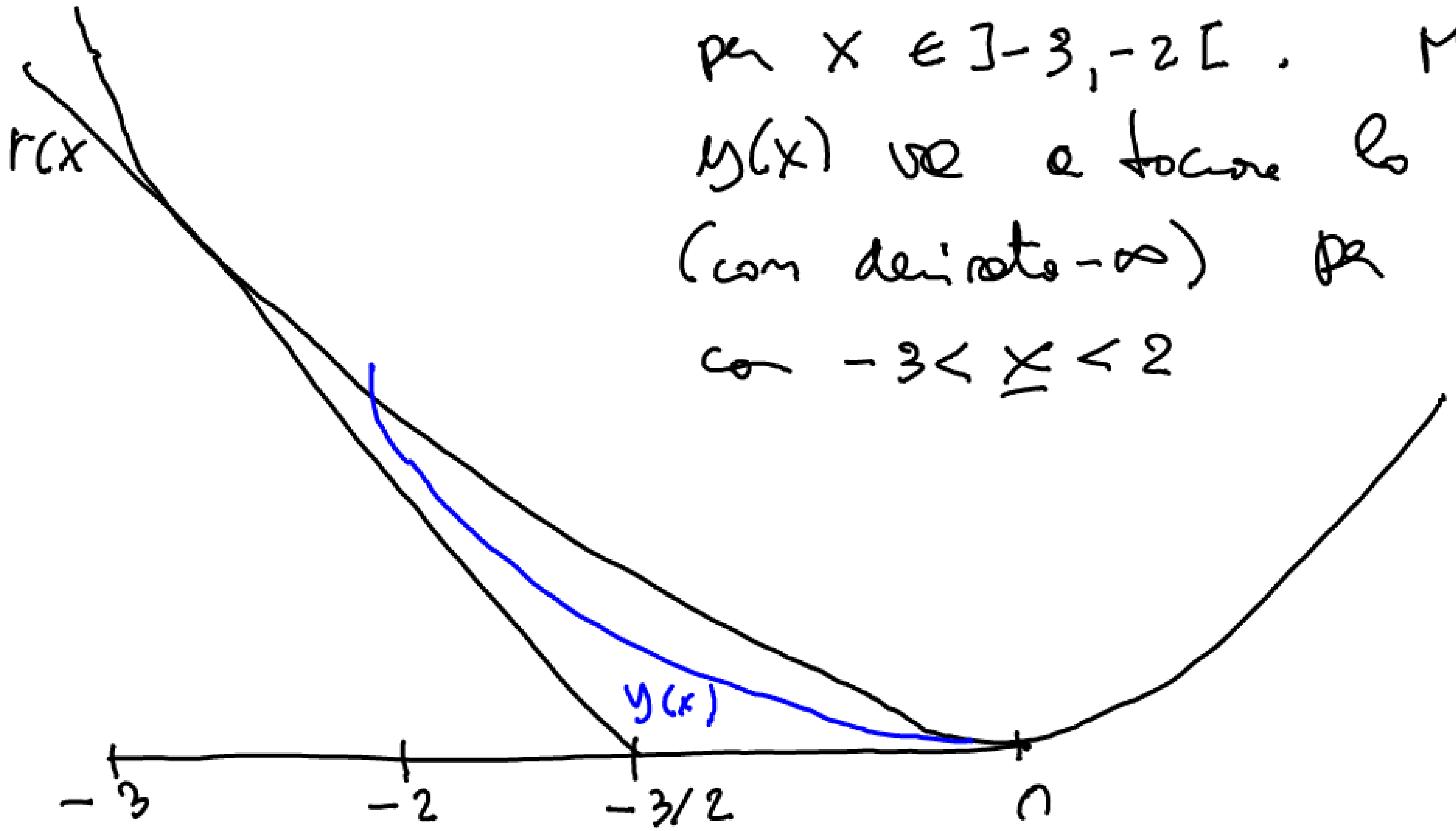
per cui $r(x)$ è una barriera inferiore da -3 e -2. Allora $y(x) \geq -12x - 18$

per $x \in]-3,-2[$. Ma allora

$y(x)$ va a toccare la parabola

(con derivata $-\infty$) per un $\underline{x}$

con $-3 < \underline{x} < 2$

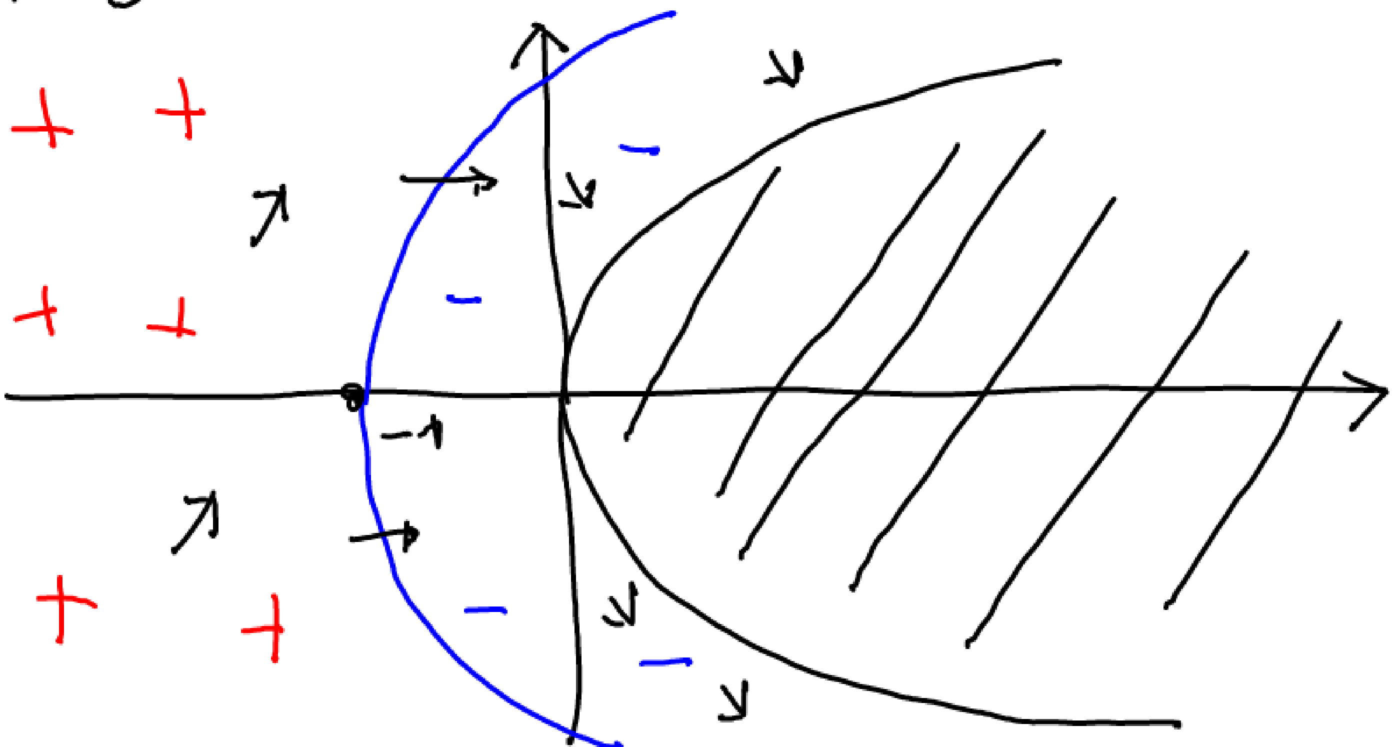


(3) $\begin{cases} y' = \ln(y^2 - x) = F(x,y). \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

(a)(b)(c) Lo zono Ω in cui vale il teorema di Cauchy è $\Omega = \{(x,y) : x < y^2\}$.

NON CI SONO sol. costanti.

$F(x,y) > 0$ se $y^2 - x > 1 \Leftrightarrow x < y^2 - 1$



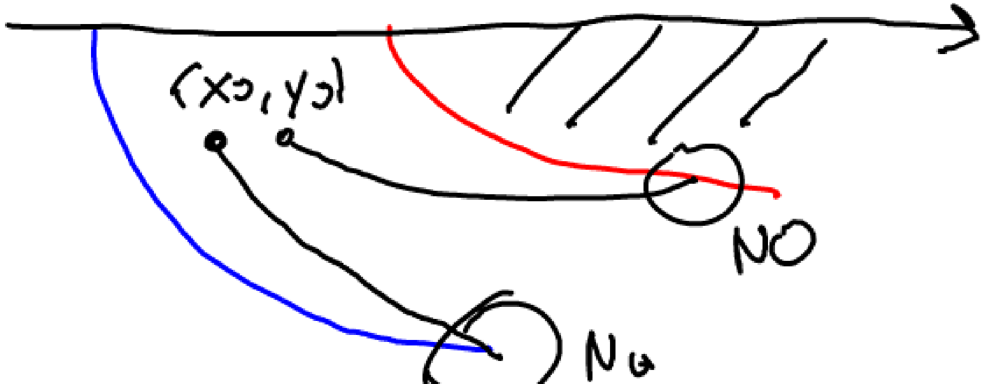
(d) $x_0 > -1$ $y_0 < 0$ $\left((x_0, y_0) \in \Omega \right)$

Consideriamo prima il caso $y_0 > x_0^2 - 1$
((x_0, y_0) nella zona in cui $F < 0$)

Allora $y(x)$ parte decrescendo e continua a decrescere fino a quando rimane nella zona

$$x < y^2 < x+1$$

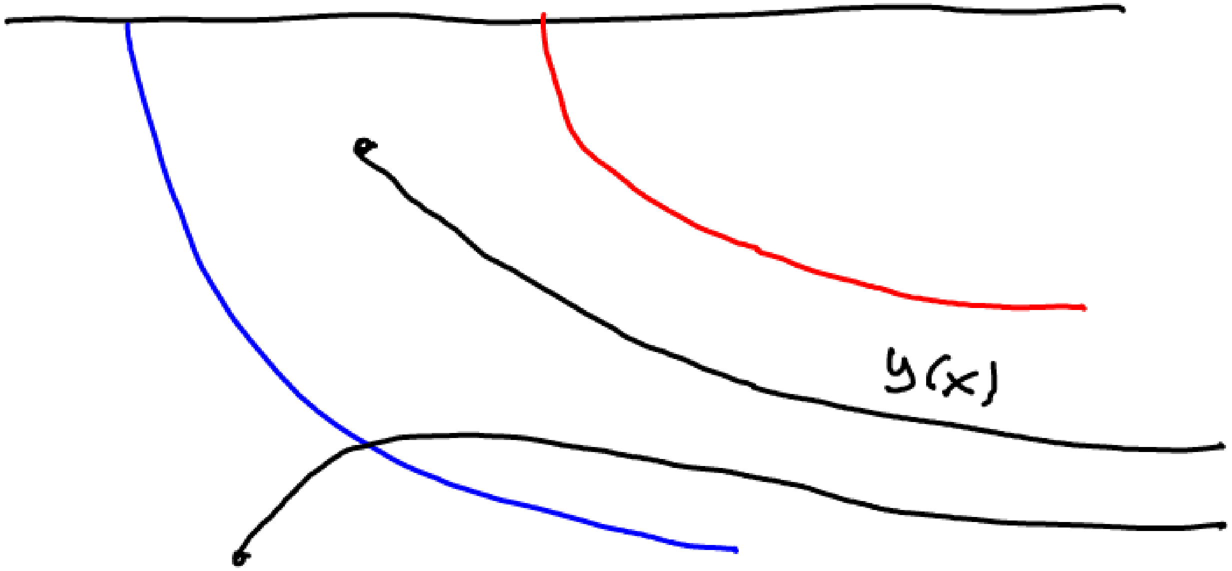
MA $(x, y(x))$ NON può mai finire sulla parabola $x = y^2 - 1$ perché dovrebbe arrivarci con derivata nulla



e non può finire sulla parabola $x = y^2$ perché lo farebbe con derivata $+\infty$

DUNQUE $-\sqrt{x+1} < y(x) < -\sqrt{x}$ $\quad \forall x \geq x_0$
$(x_0 > -1)$

$\Rightarrow$ il tempo massimale è $+\infty$ e $y(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$



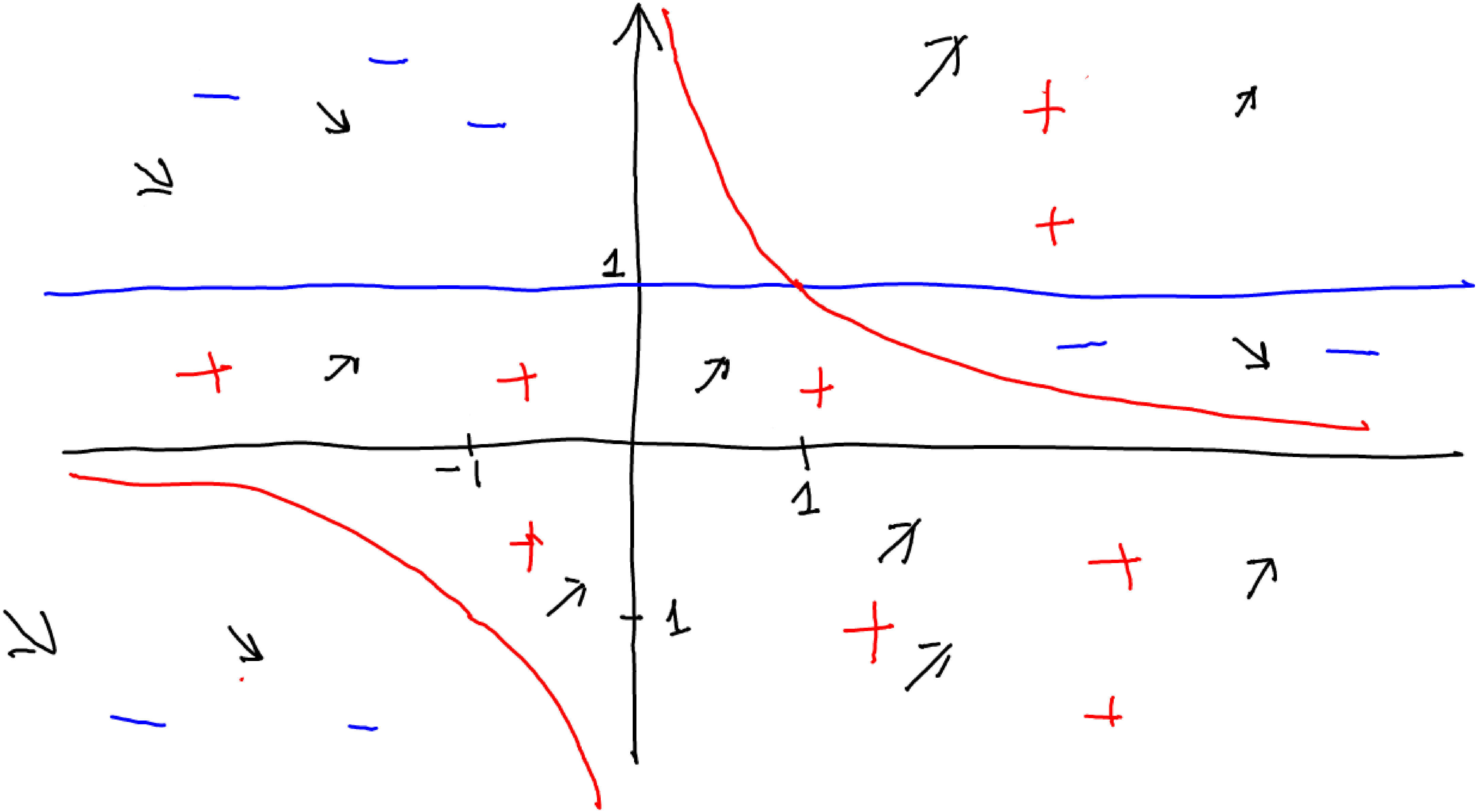
Se invece $y_0^2 < x+1$ allora $y(x)$ cresce per un po', incontra la parabola blu e da lì in poi si ricade nel caso precedente

(4) $y' = \dfrac{y-1}{xy-1} = F(x,y)$

(a) F è definita per $xy \neq 1$ e in tale insieme è differenziabile. Quindi se $x_0 y_0 \neq 1$ vale il teorema di esistenza locale

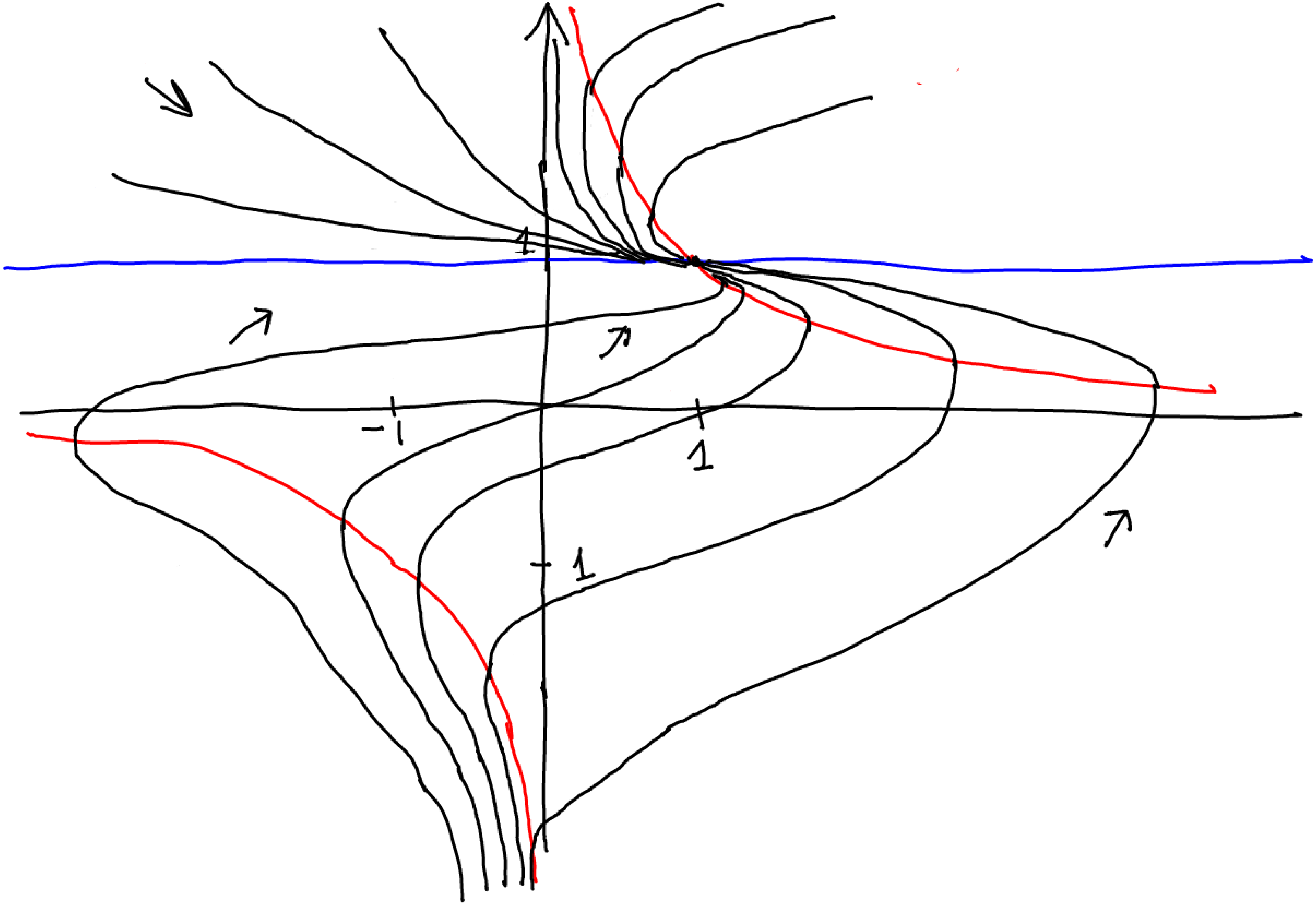
(b) c'è la soluzione costante $y = 1$ ed è l'unica dato che $\dfrac{y-1}{xy-1} = 0 \Rightarrow y = 1$

(c)

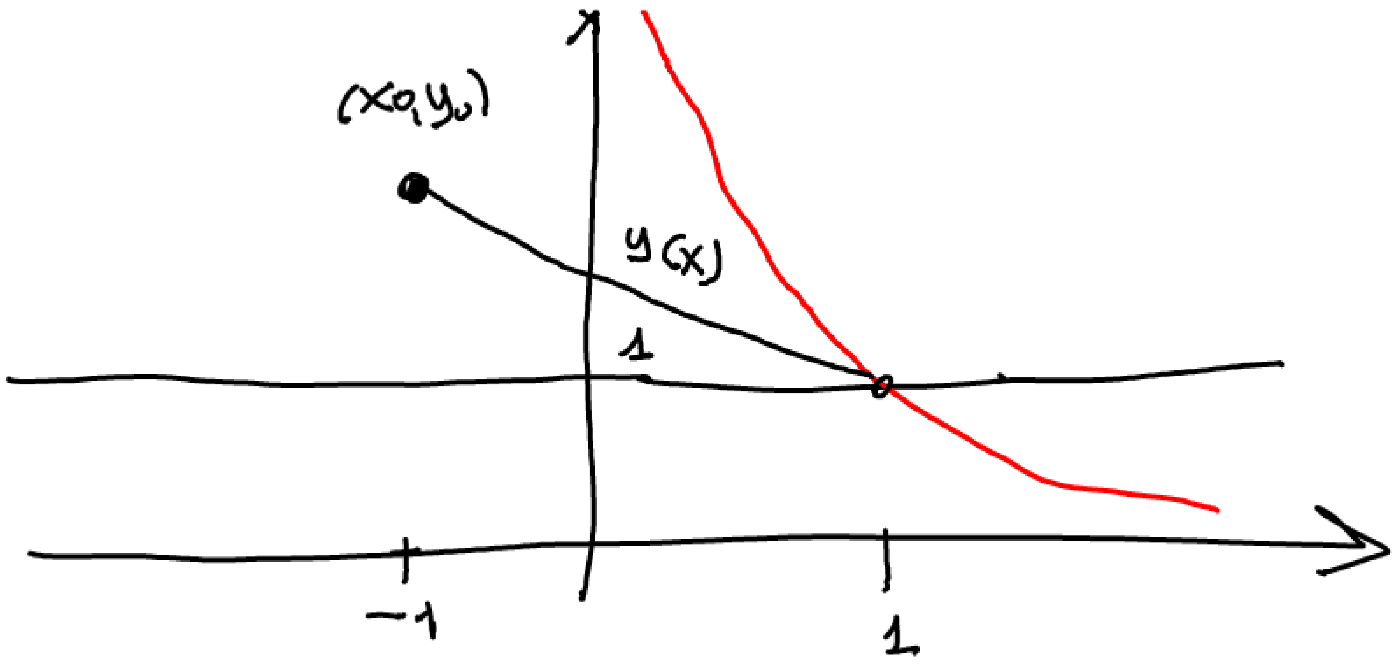


Le curve dovrebbero andare come sotto

$\Downarrow$


1
-1
1
-1

(d) $\quad x_0 = -1 \quad y_0 > 1$

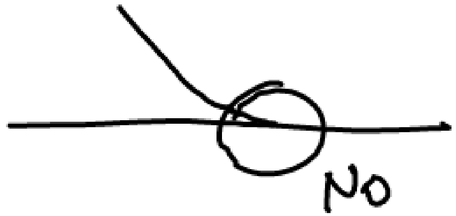


Il tempo massimale deve essere $\bar{x} = 1$ e

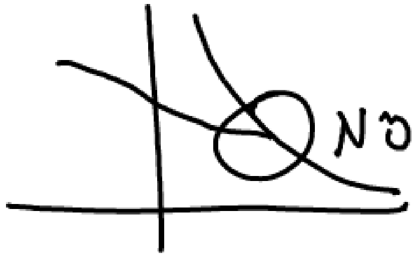
$\lim_{x \to 1} y(x) = 1$. Infatti $y(x)$ risulta

decrescente fino a che $1 < y(x)$ e $y(x) < 1/x$ per $x > 0$

Ma $y(x)$ non può finire in 1 per il teorema di unicità



e non può andare sulla curva $y = \frac{1}{x}$ (per $x > 0$)
dato che ci dovrebbe arrivare con derivata $-\infty$



Dunque $y(x)$ rimane "intrappolata" tra 1 e $1/x$

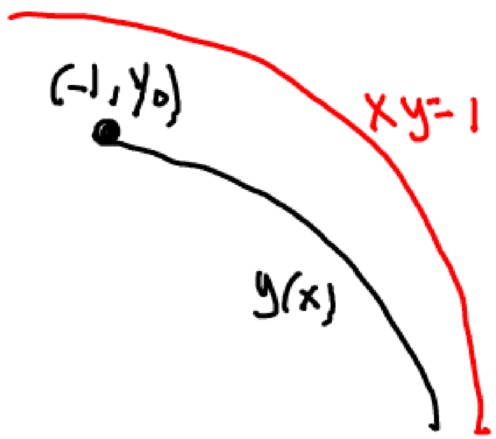
per cui tende a 1 quando $x \to 1$
(IN $(1,1)$ il Teorema di di Cauchy NON vale).

(e) $x_0 = -1$ $y_0 < -1$. Dato che parte sotto la curva $xy = 1$ $(x<0)$ la $y(x$ è decrescente. NON è POSSIBILE che $y(x)$ finisca sulla curva $xy = 1$ dato che si dovrebbe arrivare con derivata $-\infty$

Dunque $y(x)$ rimane <u>sempre sotto</u> tale curva.

Ne segue che $\bar{x} = 0$

e $\lim_{x \to 0^-} y(x) = -\infty$



(f) $x_0 = 1$ $y_0 > 1$. In questo caso $y(x)$ è crescente e tale rimane $\forall x \geq 1$. Dico che il tempo massimale $\bar{x}$ è $+\infty$. Infatti se $\bar{x} < +\infty$, dovrebbe essere $\lim_{x \to \bar{x}^-} y(x) = +\infty$. Ma essendo

$$\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ y \to +\infty}} F(x,y) = \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ y \to +\infty}} \frac{y-1}{xy-1} = \frac{1}{\bar{x}} \in \mathbb{R}$$

avremmo $\displaystyle\lim_{x \to \bar{x}} y'(x) = \frac{1}{\bar{x}} \in \mathbb{R}$ che è

incompatibile con la divergenza di $y(x)$.

Dunque $\bar{x} = +\infty$. Notiamo che:

$$y' = \frac{y-1}{xy-1} \geq \frac{y-1}{xy} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{y}\right) \geq \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{y_0}\right)$$

$$\Rightarrow y(x) \geq y_0 + \left(1-\frac{1}{y_0}\right)\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

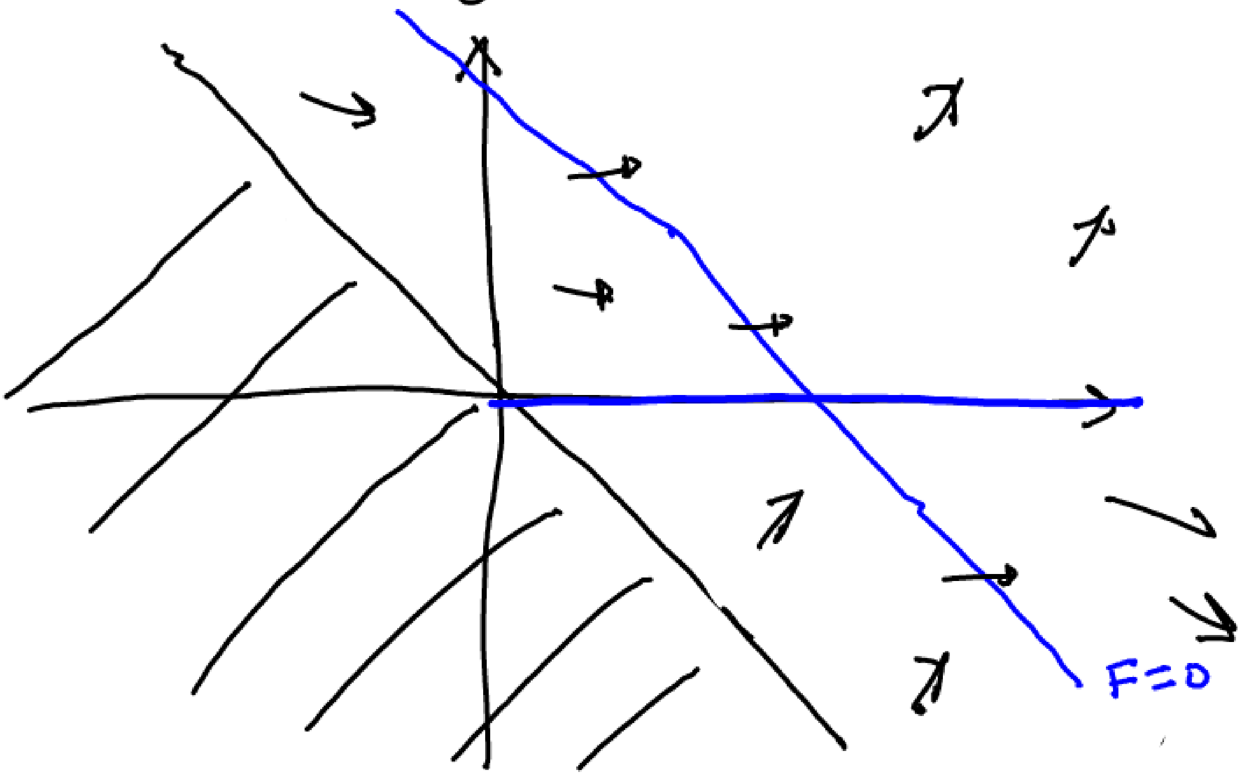
$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$$

(5) $\begin{cases} y' = y \ln^3(x+y) = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

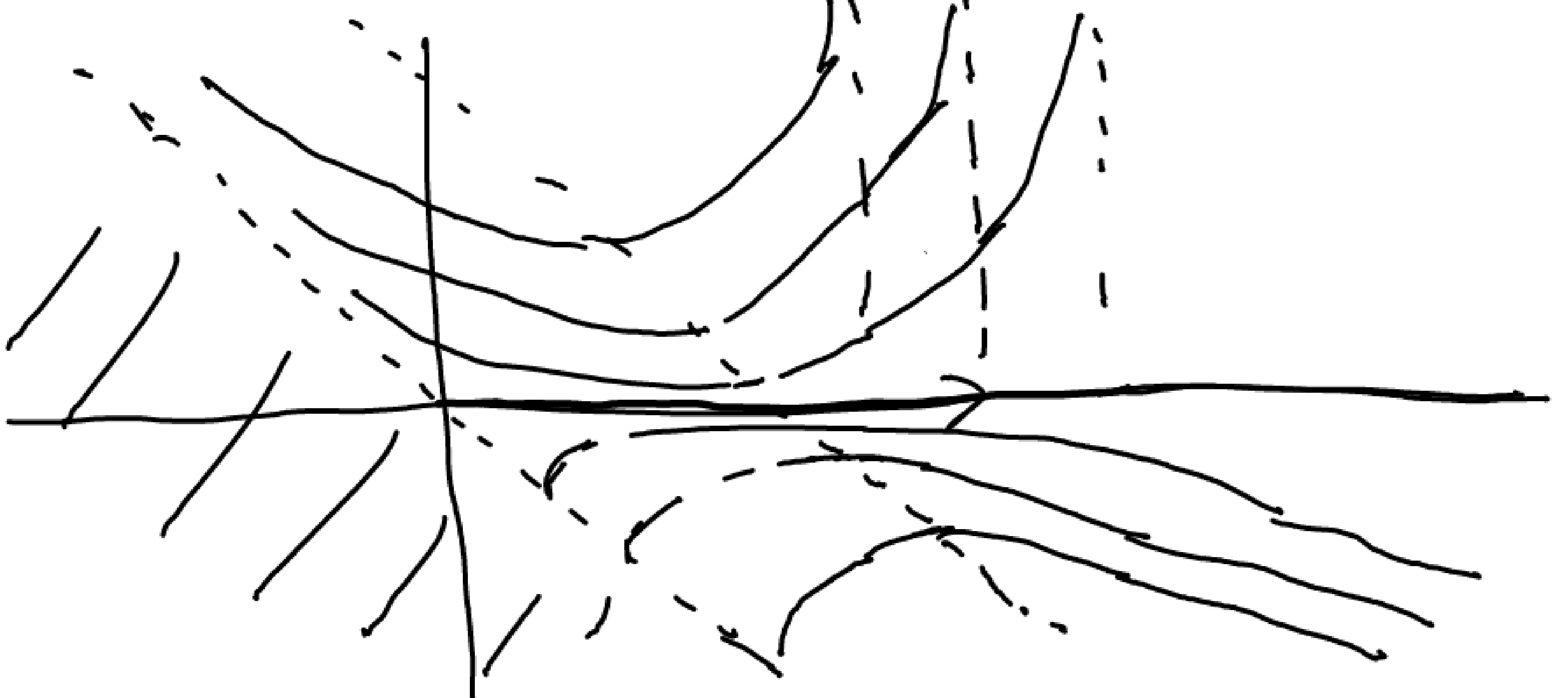
(a)(b)(c) Il teorema di Cauchy vale se $x_0 + y_0 > 0$.

c'è la sol. costante $y = 0$. $F(x,y) > 0$

$\Longleftrightarrow x + y > 1$



– Le soluzioni dovrebbero essere più o meno così:



(d) $x_0 = 0 \quad y_0 = \frac{1}{2}$. Dico che $\underline{x} = -\infty$. Infatti se $\underline{x} \in \mathbb{R}$ allora dovrebbe succedere che

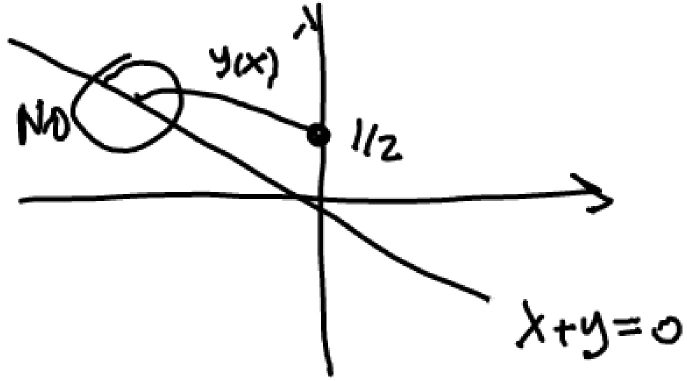
$$(x, y(x)) \to (\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{per } x \to \underline{x}^+ \quad \text{con } \underline{y} \geq \frac{1}{2}$$

e $\underline{x} + \underline{y} = 0$. MA allora

$$y'(x) = y \ln^3(x + y(x)) \to -\infty .$$

Questo implica (uso Hôpital)

che $y'(\underline{x}) = \lim_{x \to \underline{x}^+} \frac{y(x) - \underline{y}}{x - \underline{x}} = -\infty$

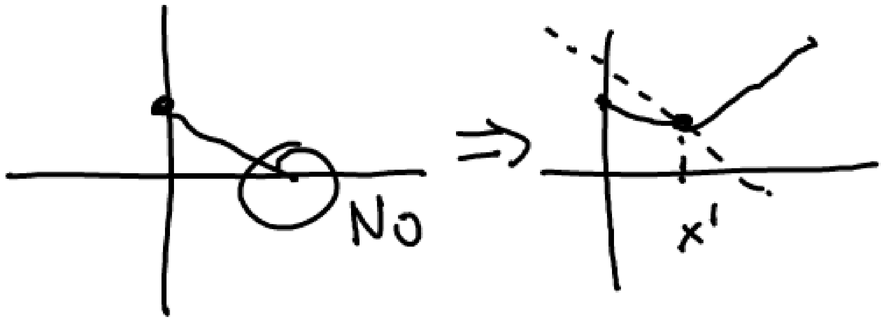


D'altra parte $y(x) + x > 0$ per $x > \underline{x} \Leftrightarrow y(x) - \underbrace{\bar{y} - \bar{x}}_{=0} + x > 0$

$$\frac{y(x) - \bar{y}}{x - \bar{x}} > -1 \Rightarrow \bar{y}(\underline{x}) \geq -1 \quad \text{ASSURDO}$$

(e) Sempre $x_0 = 0$ $y_0 = 1/2$, dico che $\bar{x} > 1$, $\bar{x} < +\infty$

Infatti per $x > 0$ e x vicino a x_0 la $y(x)$ è decrescente, ma non può diventare zero per l'unicità della sol.



Dunque per una $x' < 1$ si ha

$$y(x') + x' = 1 \Rightarrow y'(x') = 0$$

e per $x > x'$ $y(x)$ è crescente ($\Rightarrow \bar{x} > 1$).

Notiamo per $x \geq 1$, $y \ln^3(x+y) \geq y \ln^3(y+1)$

Risolviamo

$$\begin{cases} z' = z \ln^3(z+1) \\ z(1) = z_0 \qquad (z_0 > 0) \end{cases}$$

Si trova

$$\int_{z_0}^{z(x)} \frac{ds}{s \ln^3(s+1)} = x-1 \qquad (t = \ln(s+1))$$

$$\Leftrightarrow \int_{\ln(1+z_0)}^{\ln(1+z(x))} \frac{1}{t^3}\,dt = x-1 \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{\ln(1+z_0)}^{\ln(1+z(x))} = x-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln^{-2}(1+z_0) - \ln^{-2}(1+z(x)) = 2(x-1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln(1+z(x)) = \left(\ln^{-2}(1+z_0) - 2(x-1)\right)^{-1/2} \iff$$

$$z(x) = -1 + e^{\frac{1}{\sqrt{\ln^{-2}(1+z_0) - 2(x-1)}}}$$

Questo $z(x)$ è definito fino a quando

$$2(x-1) \leq \ln^{-2}(1+z_0) \iff x < 1 + \frac{1}{2\ln^2(1+z_0)} =: \tilde{x}$$

e chiaramente $z(x) \to +\infty$ se $x \to \tilde{x}^-$

Dato che, come visto, $y\ln^3(y+x) \geq y\ln^3(y+1))$

$\Rightarrow$ $y(x) \geq z(x)$ per $x \geq 1$ e quindi anche $y(x)$ esplode in tempo finito

(f) $x_0 = 2$. $y_0 = -1$. In questo caso

$y(x)$ "parte decrescente", sopra la retta $x+y=1$

Dico che non può mai attraversare la retta $x+y=1$.

Se infatti, per un certo $\tilde{x}$, $y(\tilde{x}) + \tilde{x} = 1 \Longrightarrow$

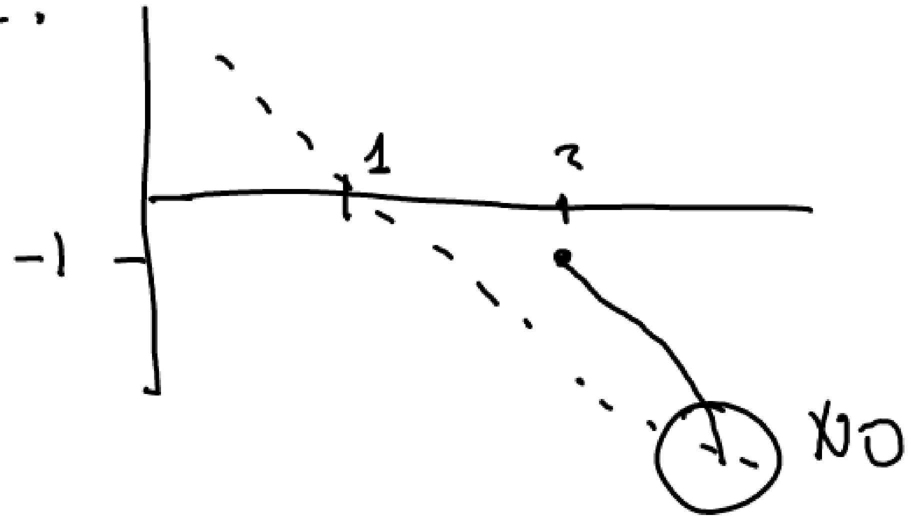
$$y'(\tilde{x}) = y(\tilde{x}) \ln^3(1) = 0$$

Ma nei punti $x < \tilde{x}$ si ha:

$$y(x) + x > 1 \Longrightarrow$$

$$\frac{y(x) - y(\tilde{x})}{x - \tilde{x}} =$$

$$\frac{y(x) - 1 + \tilde{x}}{x - \tilde{x}} > \frac{1 - x - 1 + \tilde{x}}{x - \tilde{x}} = -1$$



da cui $y'(\tilde{x}) \geq -1 \neq 0$ ASSURDO

DUNQUE $y(x)$ rimane <u>sempre</u> decrescente.

Ne segue che non può mai uscire da $\{x+y>0\}$

e quindi esiste per <u>tutte le $x > 2$</u>, cioè $\overline{x} = +\infty$.

Dico che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$. Se infatti

$y(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ (ℓ esiste per monotonia)

avremmo un assurdo, dato che

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to \ell}} y \ln^3(y+x) = +\infty \Rightarrow y'(x) \to +\infty$$

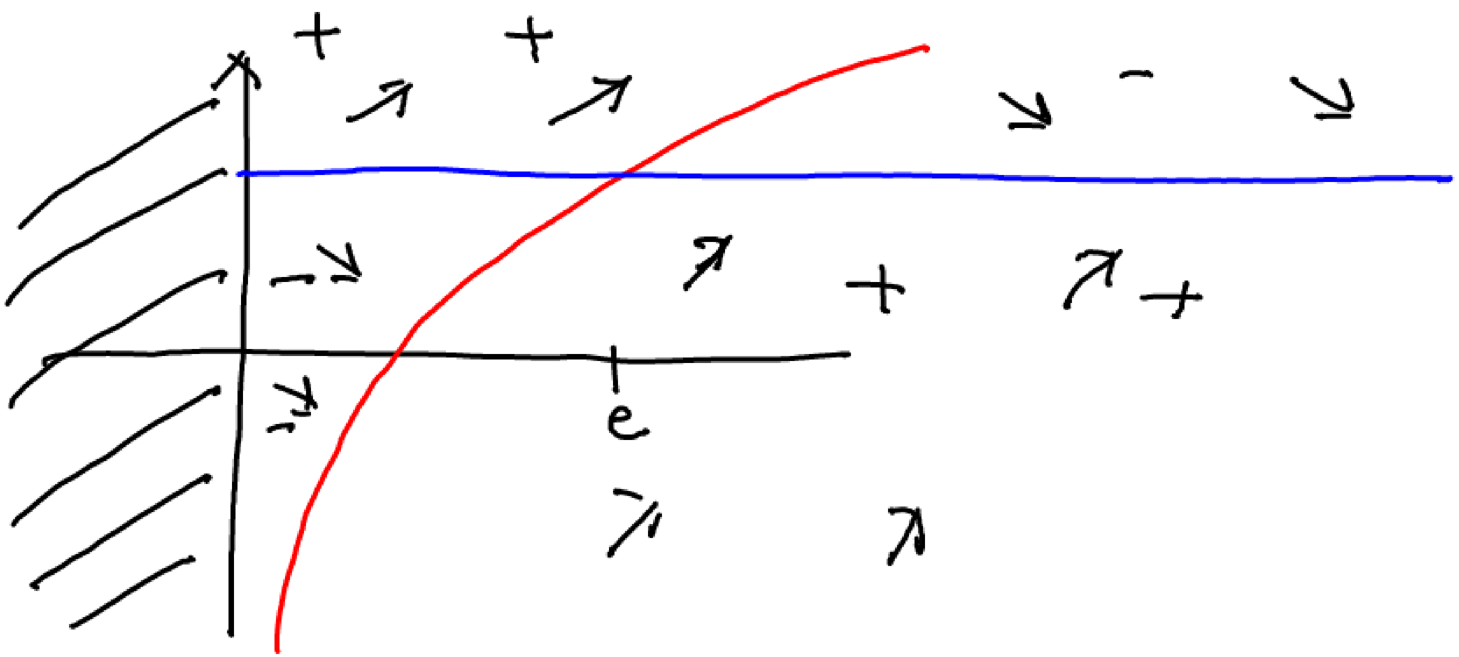
e questo è incompatibile con $y(x) \to \ell \in \mathbb{R}$.

(6) $\begin{cases} y' = \dfrac{y-1}{y-\ln(x)} = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

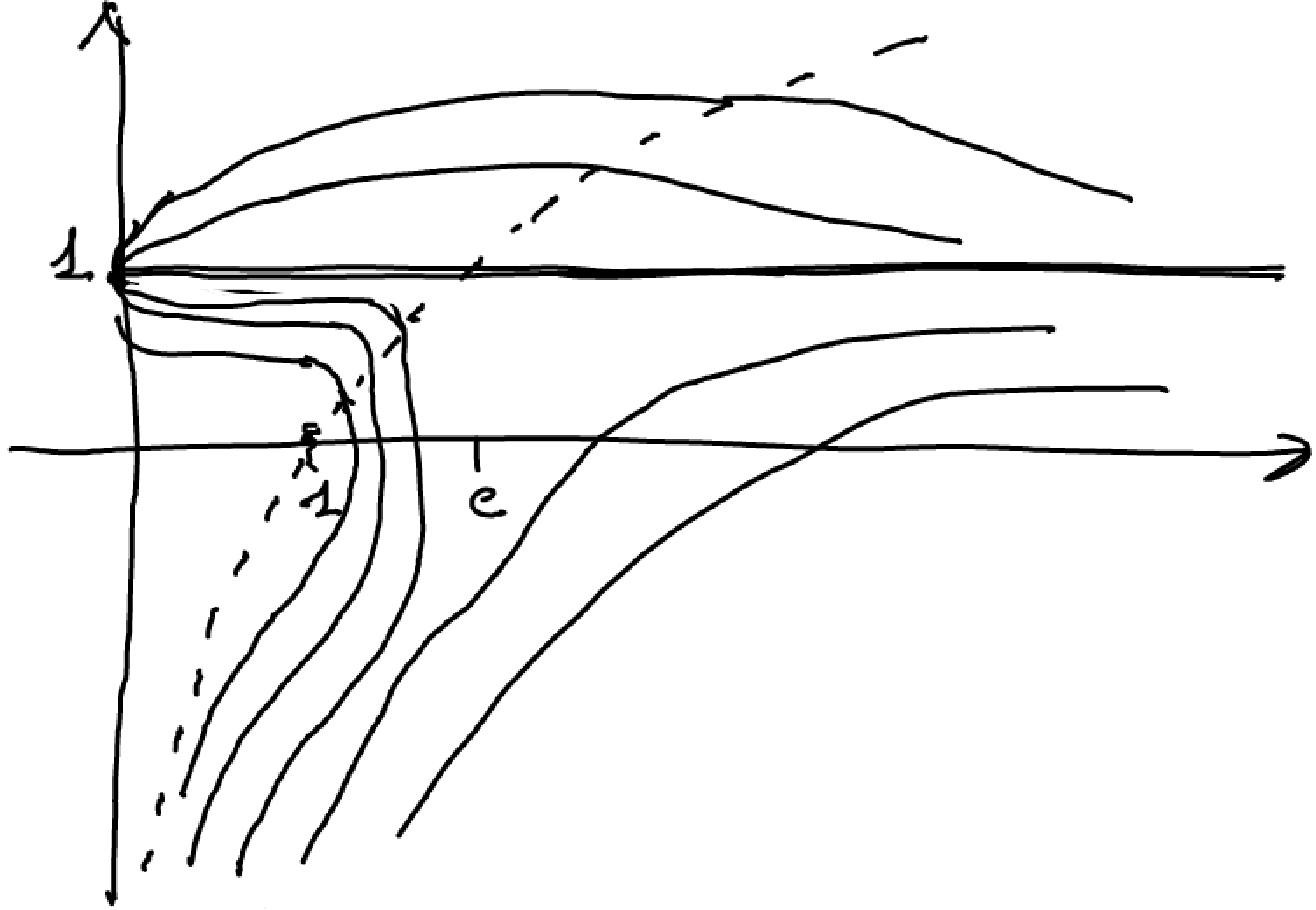
(a) (b) (c) L'insieme di esistenza è $\Omega = \{x > 0,\ y \neq \ln(x)\}$

L'unica sol. costante è $y = 1$. $F(x,y) > 0$

$\iff$ $y > 1$ e $y > \ln(x)$ oppure $y < 1$ e $y < \ln(x)$



~ Le sol. dovrebbero andare t/- così →



(e) $x_0 = 3$ $y_0 = 0$ (NOTIAMO CHE $3 > e$)

Il punto $(3, 0)$ si trova nella zona $\{F > 0\}$ e quindi $y(x)$ parte crescente. Dato che vale il teorema di unicità, $y(x)$ non incrocia mai la sol. $y = 1$ $\Rightarrow$ $y(x) \leq 1$ per ogni $x > 3$

Ne segue che $\bar{X} = +\infty$. e che esiste

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \ell \leq 1$$

Notiamo che, se $x \geq 3 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{y-1}{y - \ln(x)} = \frac{1-y}{\ln(x) - y} \geq \frac{1-y}{\ln(x)} \qquad (x \geq 3)$$

Dunque $y(x) \geq z(x)$ dove z risolve

$$\begin{cases} z' = \dfrac{1-z}{\ln(x)} \\ z(3) = -1 \end{cases}$$

che possiamo risolvere $\Rightarrow$

$$\int_{-1}^{z(x)} \frac{ds}{1-s} = \int_3^x \frac{dt}{\ln(t)} =: G(x) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$-\ln(1-s)\Big|_{-1}^{z(x)} = G(x) \iff$$

$$\ln\frac{2}{1-z(x)} = G(x) \iff \frac{2}{1-z(x)} = e^{G(x)}$$

$$\iff z(x) = 1 - \frac{2}{G(x)}$$

D'altra parte la funzione $\frac{1}{\ln(x)}$ non è integrabile all'infinito dato che $\ln(x) \le x \Rightarrow \frac{1}{\ln(x)} \ge \frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x}$ NON è integrabile a $+\infty$. Dunque $G(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty \Rightarrow z(x) \to 1$ se $x \to +\infty$.

Ne segue $\ell = 1$

(d) Sempre per $x_0=3$ $y_0=0$ cerchiamo il tempo massimale d'esistenza $\underline{X}$. Dico che $\underline{X}=0$.

Infatti se $\underline{X}>0$ allora per $x\to\underline{X}$

$$y(x)\to\underline{y} \quad \text{con} \quad \underline{y}=\ln(\underline{X})$$

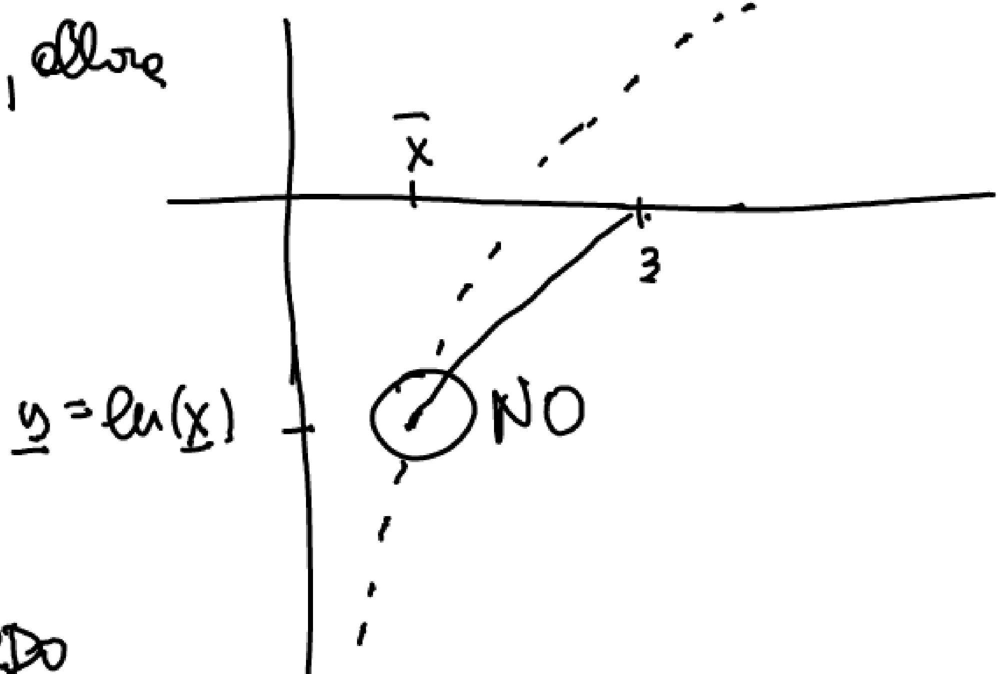
e questo implica $y'(x)=\dfrac{y(x)-1}{y(x)-\ln(x)} \to +\infty$ per $x\to\underline{X}$

Ne segue che, se $y(\underline{X})=\underline{y}=\ln(\underline{X})$, allora $y'(\underline{X})=-\infty$. Ma se $x>\underline{X}$

$$\frac{y(x)-\underline{y}}{x-\underline{X}} < \frac{\ln(x)-\underline{y}}{x-\underline{X}} =$$

$$\frac{\ln(x)-\ln(\underline{X})}{x-\underline{X}} \to \frac{1}{\underline{X}}\in\mathbb{R}$$

ASSURDO



Dunque $y(x)$ rimane sempre <u>sotto</u> la curva $y = \ln(x)$

$\Rightarrow \underline{x} = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} y(x) = -\infty$

(f) $x_0 = 1/2$ $y_0 = 0$ In questo caso (x_0, y_0) è sopra la curva $y = \ln(x)$, ma sotto la costante $y = 1$ e quindi è decrescente fino a che rimane in questa zona. Dato che (per l'unicità) non può confluire nella retta $y = 1$ ed essendo decrescente non può raggiungere la curva $y = \ln(x)$ $\Rightarrow$ il tempo massimale sx è $\underline{x} = 0$. Inoltre se $x \to 0^+$ $y(x) \to \ell \in]0, 1]$

<u>NON APPROFONDIAMO</u> se $\ell = 1$ o $\ell < 1$

<u>NOTA</u> Se si confronta come prima con le soluzioni

z di $\begin{cases} z' = \dfrac{z-1}{1-\ln(x)} \\ y(1) = -1/2 \end{cases}$

si vede che $z(x) \geq y(x)$ e facendo i conti si vede $\lim\limits_{x \to 0^+} z(x) = \ell_1 < 1 \Rightarrow \ell \leq \ell_1 < 1$

(g) Come da suggerimento prendiamo $r(x) = 2x$ e vediamo che

$$F(x, r(x)) - r'(x) = \frac{2x-1}{2x-\ln(x)} - 2 =$$

$$\frac{2x-1-4x+2\ln(x)}{2x-\ln(x)} = \frac{-1-4x+2\ln(x)}{2x-\ln(x)} \to -2$$

se $x \to +\infty$. Quindi $F(x, r(x)) - r'(x) < 0$ se x è abbastanza grande, che ci dice che

$r(x)$ è una barriera inferiore destra

Allora se x_0 è grande e $y_0 > 2x_0$ la soluzione $y(x)$ resta sempre sopra la retta $r(x)$

$\Rightarrow \quad \bar{X} = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$

(7) $\begin{cases} y' = \dfrac{e^y}{\sqrt{e^y - x}} = F(x,y) = \dfrac{e^{y/2}}{\sqrt{1 - xe^{-y}}} \\ y(x_0) = x_0 \end{cases}$

(a)(b)(c) L'insieme di esistenza è $e^y - x > 0 \iff$

$x > 0$ e $y > \ln(x)$ OPPURE $x \leq 0$

NON CI SONO SOL. COSTANTI - $F(x,y) < 0 \ \forall (x,y)$

TUTTE LE SOL. SONO CRESCENTI

(e). $(x_0, y_0) = (0,0)$ Dico che $\underline{x} = -\infty$. Se $\underline{x} \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \lim_{x \to \underline{x}^+} y(x) = -\infty$. MA

$$\lim_{\substack{x \to \underline{x} \\ y \to -\infty}} F(x,y) = \lim_{\substack{x \to \underline{x} \\ y \to -\infty}} \frac{e^y}{\sqrt{e^{2y} - x}} = 0$$

che non è compatibile con $y(x) \to -\infty$

DUNQUE $\underline{x} = -\infty$. INOLTRE

$x \leq 0 \Rightarrow$
$y \leq 0$

$$\frac{e^y}{\sqrt{e^y - x}} \geq \frac{e^y}{\sqrt{1-x}}$$

Sia z sol. di $z' = \dfrac{e^z}{\sqrt{1-x}}$ $z(0) = 0$, Per la diseguaglianza sopra deve essere $y(x) \leq z(x)$ $\forall x < 0$. Calcoliamo $z(x)$:

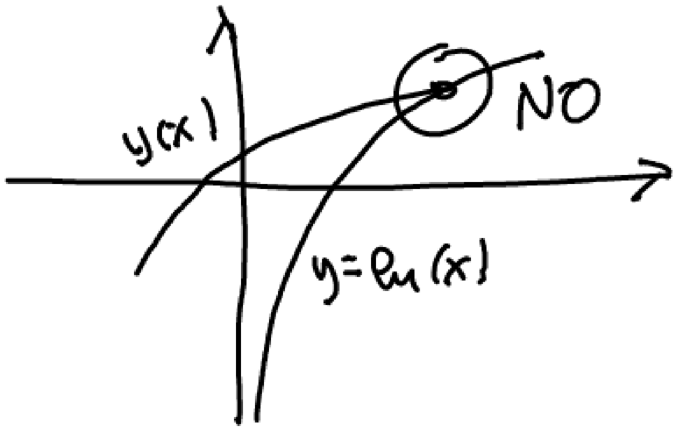
$$\int_0^{z(x)} e^{-s}\, ds = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \iff$$

$$1 - e^{-z(x)} = 2\left(1 - \sqrt{1-x}\right) \iff$$

$$z(x) = -\ln\left(1 + 2\left(\sqrt{1-x} - 1\right)\right)$$

e quindi $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) \leq \lim\limits_{x \to -\infty} z(x) = \underline{\underline{-\infty}}$

(d) Dico che $\bar{X} = +\infty$. Se infatti $\bar{X} < +\infty$ si avrebbe $y(x) \to \bar{y}$ per $x \to \bar{X}$, con $e^{\bar{y}} = \bar{X}$. Ma allora $y'(x) \to +\infty$ per $x \to \bar{X}$ che implica $y'(\bar{x}) = +\infty$.

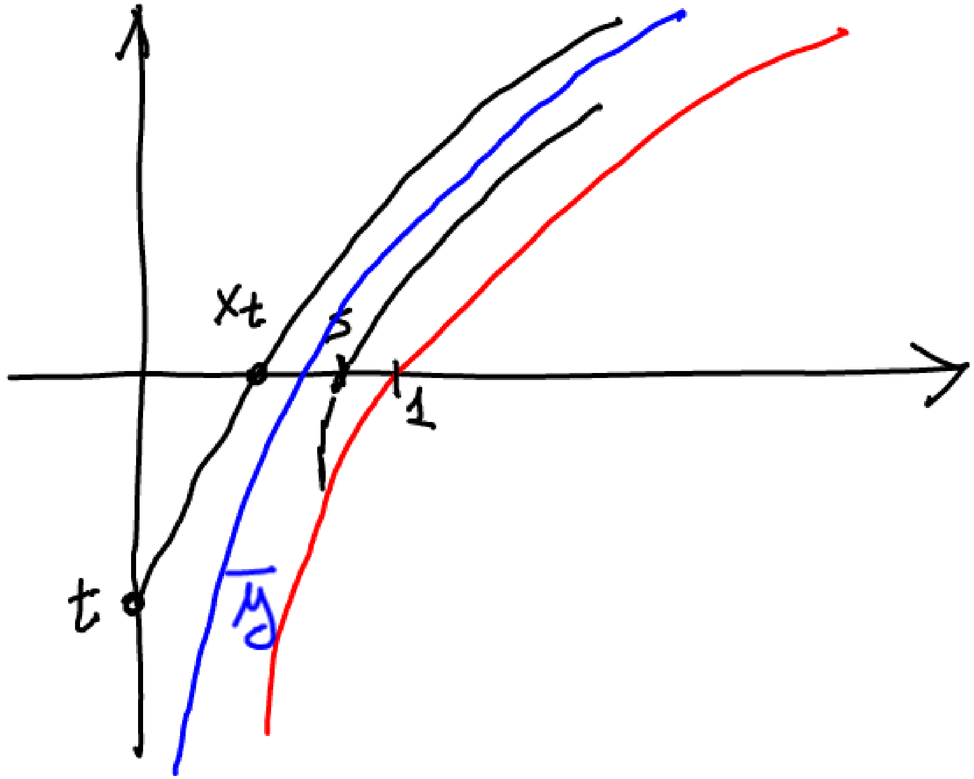


Ma essendo $y(x) > \ln(x)$ $\forall x < \bar{X}$ si ha $y'(\bar{x}) < \frac{1}{\bar{X}} \in \mathbb{R}$

DUNQUE $\bar{X} = +\infty$ e

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$$

(f) L'idea è che tra le curve che "partono" dalla curva $y = \ln x$ e quelle che "partono" da $-\infty$ ci deve essere una curva definita su $]0, +\infty[$ e tale che $\lim_{x \to 0^+} y(x) = -\infty$. Per vederlo consideriamo $x_0 = 0$ e $y_0 = t < 0$ e chiamiamo y_t la corrispondente soluzione. Per quanto visto sopra y_t è strettamente crescente, definita per tutte le $x > 0$ e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Dunque y_t si annulla in un punto $x_t \in]0, 1[$ e gli x_t sono crescenti per $t \to -\infty$ ($t \to x_t$ decrescente). Per monotonia esiste $x_t \to \bar{x}$. Dico che $\bar{x} < 1$, infatti se $s < 1$ e s è abbastanza vicino a 1 allora



la soluzione $y(x)$ con $y(s)=0$ ha un $\underline{x}>0$ e "parte" dalla curva $y=\ln(x)$ (VEDI SOPRA)

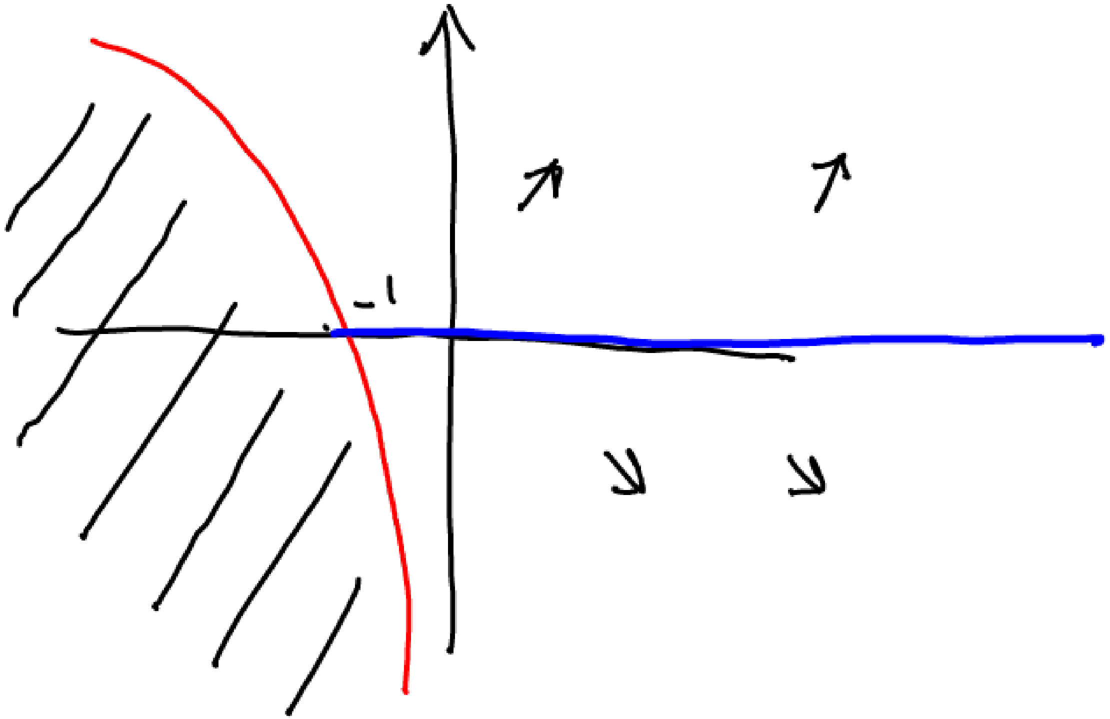
Per l'unicità deve essere $\bar{x}<s$. Se allora consideriamo la soluzione $\bar{y}$ con $\bar{y}(\bar{x})=0$ questa deve essere $\leq y_t \quad \forall t<0$. Ne segue che necessariamente $\lim_{x\to 0^+} \bar{y}(x) = -\infty$

(e quindi $\underline{x}=0$)

(8) $$y' = \frac{y e^{y}}{\sqrt{x^3 + e^{2y}}}$$

(a,b,c) L'insieme per cui vale il teorema di esistenza è

$\{x^3 + e^{2y} > 0\}$ cioè $\Omega = \{x \geq 0\} \cup \{x < 0 \text{ e } y > \frac{1}{2} \ln(-x^3)\}$

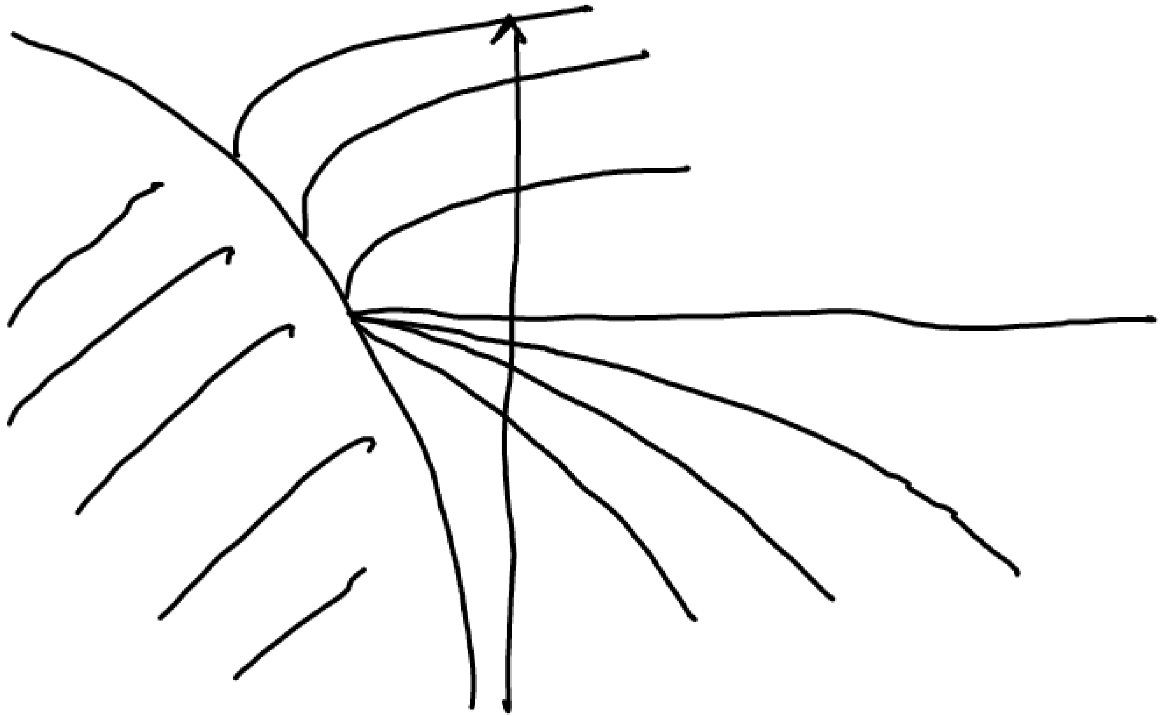


c'è la sol costante

$y = 0$.

$F(x,y) > 0 \iff y > 0$

(e $y \in \Omega$)



(d) Se $x \geq x_0$ (qualunque sia x_0) la soluzione $y(x)$ non può incontrare $\partial\Omega$. Dunque possono presentarsi due casi: $\bar{x} = +\infty$ oppure $\bar{x} < +\infty$ e $\lim_{x \to \bar{x}^-} |y(x)| = +\infty$. Dico che questo secondo caso non si verifica. Infatti se $\bar{x} < +\infty$

$$\lim_{x \to \bar{x},\, |y| \to \infty} \left| \frac{F(x,y)}{y} \right| = \lim \frac{e^{y}}{\sqrt{e^{2y} + x^3}} = 1$$

e questo impedisce l'esplosione al tempo $\overline{X}$.

Dunque $\overline{X} = +\infty$

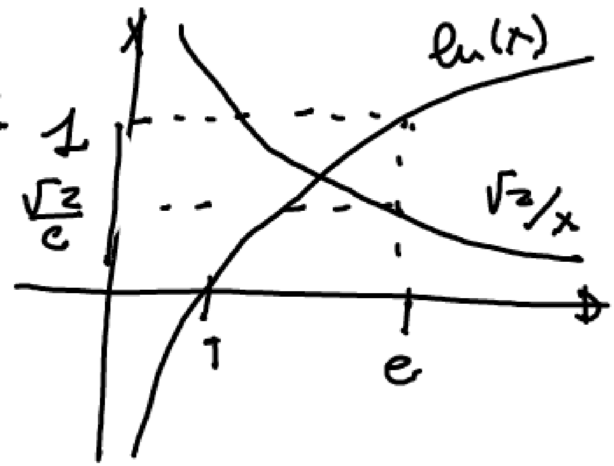
(e) $x_0 = -1 \quad y_0 = 2$

Come detto sopra $\overline{X} = +\infty$. Prendiamo

$r(x) = \frac{3}{2} \ln x$. Allora $r'(x) = \frac{3}{2} \frac{1}{x}$

$$F(x, r(x)) = \frac{\frac{3}{2} \ln(x)\, x^{3/2}}{\sqrt{x^3 + x^3}} = \frac{3}{2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{2}}$$

$$F(x, r(x)) > r'(x) \Leftrightarrow \ln(x) > \frac{\sqrt{2}}{x}$$



sicuramente vero per $x \geq e$ dato che

$\ln(e) = 1 > \frac{\sqrt{2}}{e}$

SE $x \geq e$

Dunque r $r(x)$ è una barriera inferiore dx.

Inoltre $r(e) = \frac{3}{2} < 2$. Allora

dato che $y(x)$ è crescente $\Rightarrow$

$y(e) > y(-1) = 2 > r(e)$. Dato che

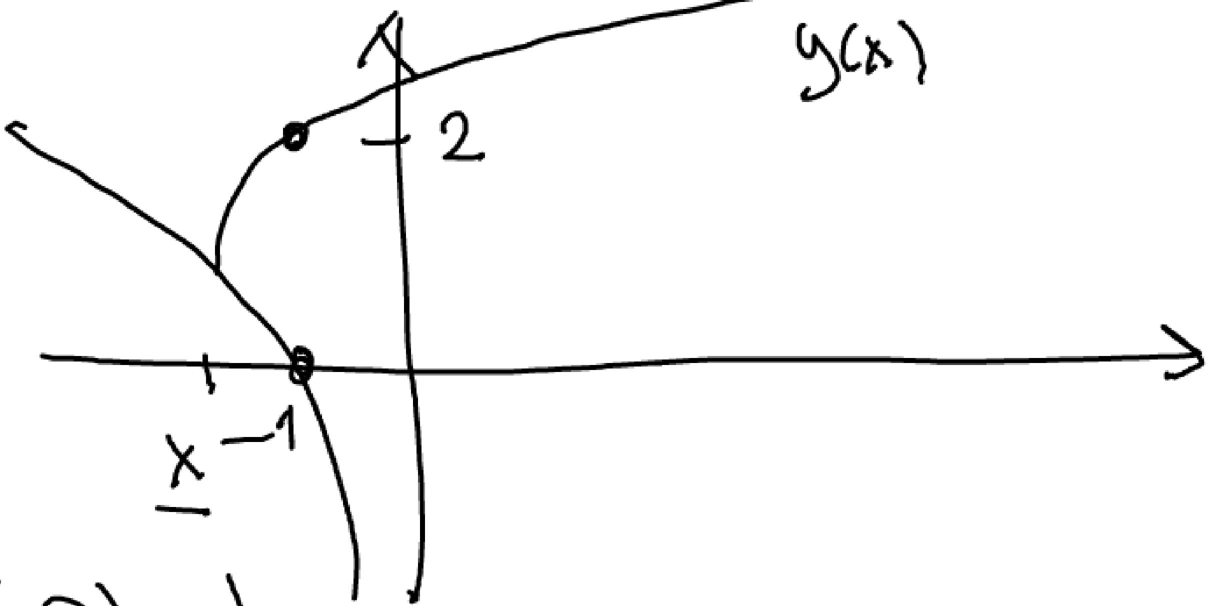
r è una barriera $\Rightarrow$ $y(x) \geq r(x)$

$\forall x \geq e$ e quindi $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$

È chiaro inoltre che $\underline{x} < -1$ deve

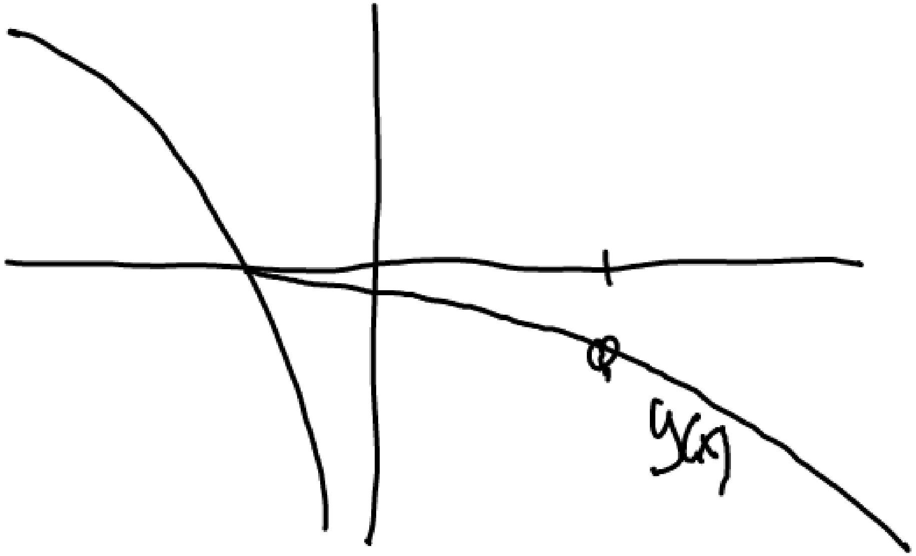
essere finito e che $\lim_{x \to \underline{x}^+} y(x) = \underline{y}$ con

$$e^{\underline{y}} + \underline{x}^3 = 0$$



$(f)(g)\ (x_0, y_0) = (2, -1)$

Il tempo massimale simisto deve essere $\underline{X} = -1$. Infatti $y(x)$ è decrescente e fino a $\underline{X}$ la



$y(x)$ è compresa tra

$y=0$ e $e^y + x^3 = 0$.

Quando $x \to \bar{x}^-$ deve

essere $y(x) \to \underline{y}$

con $e^{\underline{y}} + \underline{x}^3 = 0$

Non può essere $\underline{x} > -1$ perché in quel

caso $y'(\underline{x}) = -\infty$ ma questo non è

compatibile con il fatto che $y(x) < \frac{3}{2} \ln(-x)$

DUNQUE $\underline{x} = -1$ e

$\lim_{x \to -1^+} y(x) = 0$

Per quanto riguarda $\bar{X}$, sappiamo già che $\bar{X} = +\infty$ e per decrescenza $\Rightarrow y(x) < 0 \ \forall x$

Se $x > 0$, $y < 0$ si ha ($e^y < 1$ e $y < 0$)

$$F(x,y) = \frac{y e^y}{\sqrt{e^{2y} + x^3}} = \frac{y}{\sqrt{1 + x^3 e^{-2y}}} > \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}$$

Consideriamo z soluzione di $z' = \dfrac{z}{\sqrt{1+x^3}}$

$z(2) = -1$. Per la disuguaglianza sopra si ha

$$y(x) \geq z(x) \qquad \forall x \geq 2$$

Troviamo $z(x)$: $\quad z(x) = -e^{A(x)}$ dove

$$A(x) = \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} .$$ Notiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} A(x) = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} < +\infty$$

perché $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \simeq \frac{1}{t^{3/2}}$ e $\frac{3}{2} > 1$

Dunque

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) \geqslant \lim_{x \to +\infty} -e^{A(x)} \in \mathbb{R}$$