# ANALISI 1 [1]
# SESTA LEZIONE

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

# Operazioni con i limiti infiniti

Supponiamo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano due successioni, che $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e che

$$a_n \to l_1, \quad b_n \to l_2.$$

Allora

1. Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 > -\infty$ allora $a_n + b_n \to +\infty$
2. Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 < +\infty$ allora $a_n + b_n \to -\infty$
3. Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 > 0$ allora $a_n b_n \to +\infty$
4. Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 < 0$ allora $a_n b_n \to -\infty$
5. Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 > 0$ allora $a_n b_n \to -\infty$
6. Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 < 0$ allora $a_n b_n \to +\infty$

Possiamo allora convenire che:

$$\begin{array}{lll} l + \infty = +\infty \quad \text{se } l > -\infty & \qquad & l - \infty = \infty \quad \text{se } l < +\infty \\ l \cdot (+\infty) = +\infty \quad \text{se } l > 0 & & l \cdot (+\infty) = -\infty \quad \text{se } l < 0 \\ l \cdot (-\infty) = -\infty \quad \text{se } l > 0 & & l \cdot (-\infty) = +\infty \quad \text{se } l < 0 \end{array}$$

mentre **NON** definiamo

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (+\infty), \quad 0 \cdot (-\infty) \qquad (*)$$

(e i viceversa). Con questa convenzione possiamo dire che

$$a_n \to l_1,\ b_n \to l_2 \Rightarrow a_n + b_n \to l_1 + l_2, \quad a_n b_n \to l_1 l_2$$

PURCHÈ le operazioni tra $l_1$ e $l_2$ siano definite. I teoremi non dicono nulla invece se nel risultato si presenta una delle forme $(*)$.

Se il limite di una somma o di un prodotto porta a un'espressione tra quelle in $(*)$, si dice che su ha a che fare con una **forma indeterminata**. ATTENZIONE

- Il fatto che un limite si presenti in una forma indeterminata **non vuol dire** che il limite sia indefinito. Vuole solo dire che il risultato di tale limite non si può ricavare in *generale*, conoscendo solo i due limiti delle successioni di partenza. Serviranno altre informazioni, da ricavare caso per caso.
- **È sbagliato** usare espressioni del tipo

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=+\infty-\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty}a_nb_n=0\cdot+\infty$$

  (visto che i simboli scritti a destra non significano nulla). Bisognerebbe scrivere

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty \text{ e } \lim_{n\to-\infty}b_n=-\infty, \quad \lim_{n\to+\infty}a_n=0 \text{ e } \lim_{n\to-\infty}b_n=+\infty$$

- Indeterminate sono **le forme** $a_n+b_n$ o $a_nb_n$ (nei casi descritti sopra), non i loro limiti. $\boxed{\lim \frac{n}{n}=1 \textbf{ NON } \frac{+\infty}{+\infty}}$.

# Forme indeterminate:esempi

Dal fatto che $n \to +\infty$ si ricava (teorema sul prodotto)

$$n^k \to +\infty \text{ per ogni } k \geq 1 \text{ intero.}$$

Per i teoremi sulle somme $n^k - 1 \to +\infty$ e (moltiplicando per $-1 \neq 0$) $-n^k + 1 \to -\infty$. Allora:

- $a_n := n^2 \to +\infty$, $b_n := -n^2 + 1 \to -\infty$, allora $\boxed{a_n + b_n = 1 \to 1}$
- $a_n := n \to +\infty$, $b_n := -n^2 + 1 \to -\infty$, allora $\boxed{a_n + b_n \to -\infty}$

  infatti $$n - n^2 + 1 = n^2 \underbrace{\left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n^2}\right)}_{\to(0-1+0)} \to +\infty(-1) = -\infty$$
- $a_n := n^3 \to +\infty$, $b_n := -n^2 + 1 \to -\infty$, allora $\boxed{a_n + b_n \to +\infty}$

  infatti $$n3 - n^2 + 1 = n^3 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}_{\to(1-0+0)} \to +\infty(1) = +\infty$$

# Forme indeterminate:esempi

Dunque a seconda dei casi "$+\infty - \infty = 1/-\infty/+\infty$".
Stesso discorso per le forme tipo prodotto:

- $a_n := n \to +\infty,\ b_n : \dfrac{1}{n} \to 0,$ allora $\boxed{a_n b_n = 1 \to 1}$
- $a_n := n \to +\infty,\ b_n := \dfrac{1}{n^2} \to 0,$ allora $\boxed{a_n b_n = \frac{1}{n} \to 0}$
- $a_n := n^2 \to +\infty,\ b_n := \dfrac{1}{n} \to 0,$ allora $\boxed{a_n b_n = n \to +\infty}$

e quindi, a seconda dei casi $+\infty \cdot 0 = 1/0/+\infty$ (ma può fare qualsiasi cosa e anche non esistere).

# Limiti per eccesso/ per difetto

## Definizione

*Sia $\{a_n\}$ una successione e $l$ un numero reale. Diciamo che che* $\{a_n\}$ **tende a $l$ per eccesso** *(risp. per difetto), o anche tende a $l$* **più** *(risp. $l$ meno) e scriviamo*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l^+ \qquad \textit{o anche} \qquad a_n \to l^+$$

$$\left(\textit{risp.} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = l^+ \qquad \textit{o anche} \qquad a_n \to l^+\right)$$

*SE*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \qquad \textit{e definitivamente } a_n > l$$

$$\left(\textit{risp.} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = l \qquad \textit{e definitivamente } a_n < l\right)$$

NOTA: Nel libro la definizione è leggermente più debole ($a_n \to l^+$ se $a_n \to l$ e definitivamente $a_n \geq l$).

# Operazioni con i limiti infiniti - continuazione

Sia $\{a_n\}$ una successione.

1. Se $a_n \to +\infty$, allora $\dfrac{1}{a_n} \to 0^+$
2. Se $a_n \to -\infty$, allora $\dfrac{1}{a_n} \to 0^-$
3. Se $a_n \to 0^+$, allora $\dfrac{1}{a_n} \to +\infty$
4. Se $a_n \to 0^-$, allora $\dfrac{1}{a_n} \to -\infty$
5. $|a_n| \to +\infty$, allora $\dfrac{1}{a_n} \to 0$
6. Se $a_n \to 0$ e definitivamente $a_n \neq 0$, allora $\dfrac{1}{|a_n|} \to +\infty$

# Limiti notevoli

Sia $A$ un numero reale positivo. Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } A > 1 \\ 1 & \text{se } A = 1 \\ 0^+ & \text{se } 0 < A < 1 \end{cases}$$

Infatti se $A > 1$

$$A^n = (1 + (A-1))^n \underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} 1 + n(A-1) \to +\infty$$

mentre se $0 < A < 1$, allora $A^{-1} > 1$ e quindi

$$A^n = \frac{1}{(A^{-1})^n} \to \frac{1}{+\infty} = 0^+.$$

# Limiti notevoli

Sia $A$ un numero reale positivo e diverso da 1. Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} \log_A(n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } A > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < A < 1 \end{cases}$$

DIM Consideriamo il caso $A > 1$. Allora il logaritmo è una funzione crescente. Dunque esiste il limite

$$l = \lim_{n\to+\infty} \log_A(n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \log_A(n)$$

Se per assurdo $l < +\infty$ avremmo

$$\log_A(n) \leq l \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui prendendo l'esponenziale (che è crescente)

$$n \leq A^l \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

che è assurdo in quanto $\mathbb{N}$ è illimitato.
Per l'altro caso si nota che $\log_{1/A}(x) = -\log_A(x)$

# Risultati utili

## Teorema (Criterio della radice per i limiti)

*Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri non negativi: $a_n \geq 0$ per ogni $n$ (basterebbe definitivamente). Supponiamo che esista:*

$$l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \qquad \text{Allora:}$$

- *se $l < 1$, si ha $a_n \to 0$,*
- *se $l > 1$, si ha $a_n \to +\infty$.* DIM

## Teorema (Criterio del rapporto per i limiti)

*Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi: $a_n > 0$ per ogni $n$ (basterebbe definitivamente). Supponiamo che esista:*

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \qquad \text{Allora:}$$

- *se $l < 1$, si ha $a_n \to 0$,*
- *se $l > 1$, si ha $a_n \to +\infty$.*

*segue dal teorema seguente*

# Un teorema di Cesaro

## Teorema

*Sia* $\{a_n\}$ *una successione di numeri positivi:* $a_n > 0$ *per ogni* $n$ *(basterebbe definitivamente). Supponiamo che esista:*

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

*Allora:*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

DIM

# Limiti notevoli

1. $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ per ogni $\alpha$ reale $\alpha > 0$ DIM
2. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{A} = 1$ (già visto)
3. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ per ogni $k$ DIM
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n}{n^k} = +\infty$ se $A > 1$ per ogni $k$ DIM
5. $\lim_{n\to+\infty} n^k A^n = 0^+$ se $0 < A < 1$ per ogni $k$ DIM
6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n}{n!} = 0$, per ogni $A > 0$ DIM
7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$ DIM

# Altre proprietá dei limiti

Sia $\{a_n\}$ una successione e supponiamo che $a_n \to l$ per $l$ numero reale. Allora.

1. $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{l}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (se $k$ è pari deve essere $l \geq 0$)
2. Se $A > 0$, allora $A^{a_n} \to A^l$
3. Se $A > 0$, $A \neq 1$, $l > 0$ allora $\log_A(a_n) \to \log_A(l)$
4. Se $\alpha \in \mathbb{R}, l \geq 0$, allora $(a_n)^\alpha \to l^\alpha$
   (se $\alpha < 0$ deve essere $l > 0$) SEGUE DA 2 e 3 e contiene 1.

Inoltre se $a_n \to 0^+$

1. Se $A > 1$, $\log_A(a_n) \to +\infty$
2. Se $0 < A < 1$, $\log_A(a_n) \to -\infty$
3. Se $\alpha < 0$, allora $(a_n)^\alpha \to +\infty$

# Altre proprietá dei limiti

Se invece $a_n \to +\infty$

1. Se $A > 1$, allora $A^{a_n} \to +\infty$
2. Se $0 < A < 1$, allora $A^{a_n} \to 0^+$
3. Se $A > 1$, allora $\log_A(a_n) \to +\infty$
4. Se $0 < A < 1$, allora $\log_A(a_n) \to -\infty$
5. Se $\alpha > 0$, allora $(a_n)^\alpha \to +\infty$
6. Se $\alpha < 0$, allora $(a_n)^\alpha \to 0^+$

mentre se $a_n \to -\infty$

1. Se $A > 1$, allora $A^{a_n} \to 0^+$
2. Se $0 < A < 1$, allora $A^{a_n} \to +\infty$