ANALISI 1 [1]

VENTISEIESIMA/VENTISETTESIMA LEZIONE

Equazioni differenziali - altri esempi.

Equazioni del primo ordine a variabili separabili.

Il teorema di Cauchy.

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Altri esempi di equazioni lineari del primo ordine[2]:

1. $y' = \frac{y}{2x} - 2 + x + \frac{1}{x}$ (20/06/2006 ing.gest.);
2. $y' = \frac{3y}{x} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ (31/05/2007 ing.gest.);
3. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{1+x^2}$ (11/02/2008 ing.gest.);
4. $y' = \frac{2y}{x^2-4} - \frac{1}{(x-2)^2}$ (03/06/2008 ing.aer.).

SVOLGIMENTO

[2] presi dai compiti d'esame

Equazioni a variabili separabili

Teorema

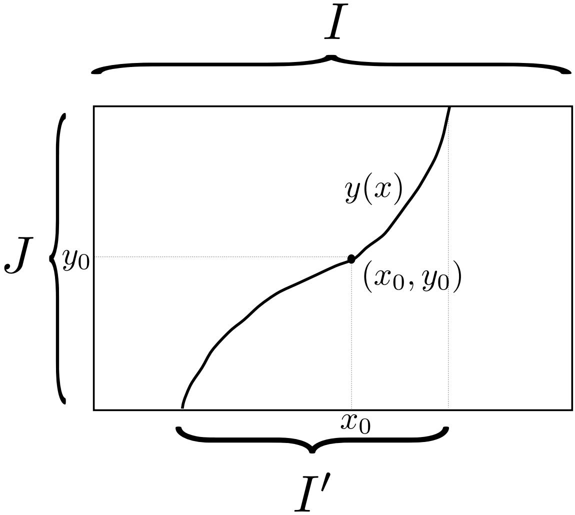
Siano I e J due intervalli di $\mathbb{R}$ e siano $A : J \to \mathbb{R}$, $B : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Chiamiamo equazione a variabili separabili l'equazione

$$y' = A(y)B(x) \tag{EVS}$$

Come già osservatoè meglio, di solito, pensare al problema di Cauchy: assegnato (x_0, y_0) in $I \times J$ si cerca un sottointervallo $I' \subset I$ con $x_0 \in I'$ e una funzione derivabile $y : I' \to J$ tale che

$$\begin{cases} y' = A(y(x))B(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (EVS(x_0, y_0))$$

FIGURA


I
J
y_0
$y(x)$
(x_0, y_0)
x_0
I'

Teorema

- *Se* $A(y_0) = 0$ *la funzione costante* $y(x) = y_0$ *risolve* $(EVS(x_0, y_0))$ *su tutto* I *(cioè con* $I' = I$*).*
- *Se* $A(y_0) \neq 0$ *esiste* $\delta > 0$ *ed esiste* $y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I \to J$ *tale che* y *risolve* $(EVS(x_0, y_0))$ *(in* $I' =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$*).*
- *Se* $I' \subset I$, *se* $y : I' \to J$ *risolve* $(EVS(x_0, y_0))$ *e se* $A(y(x)) > 0$ *in* I' *allora:*

$$y(x) = F^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} B(t)\, dt\right) \quad \forall x \in I' \qquad \text{dove } F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{A(\xi)} \tag{1}$$

Osservazione

Il teorema precedente dice che:

- *dati* x_0 *in* I *e* y_0 *in* J *esiste una soluzione* y *che "parte" da* x_0 *con valore assegnato* y_0; $y(x)$ *è* ***definita per*** x ***vicino*** *a* x_0;
- *non è detto che la soluzione* y *esista su tutto* I; ⇒ ESPLOSIONE IN TEMPO FINITO
- *se* $A(y_0) \neq 0$ *tale soluzione* ***è unica*** *(in quanto è data dalla formula; l'unicità rimane fino a che* $y(x)$ *"viaggia" nell'insieme* $\{y : A(y) \neq 0\}$;
- *può non esserci unicità se* $A(y_0) = 0$ *– può in effetti avvenire che dalla soluzione costante* $y(x) = y_0$ *"si stacchi" (in avanti o all'indietro) una soluzione non costante* ⇒ NON UNICITÀ

Esempi

- $\boxed{y' = \sqrt{y}}$ *(NON UNICITÀ)* VERIFICA
- $\boxed{y' = y^2}$ *(EPLOSIONE IN TEMPO FINITO)* VERIFICA
- $\boxed{y' = \dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}}$

Teorema di esistenza e unicità di Cauchy

Teorema

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

- *$F(x,y)$ è continua nelle due variabili;*
- *$F(x,y)$ è lipschitziana rispetto a y (uniformemente rispetto a x), cioè*

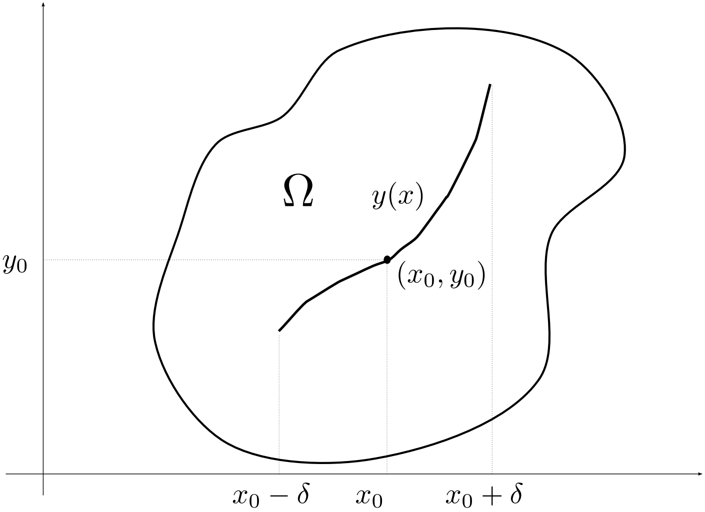
$$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega,$$

per un'opportuna costante fissa L.

Allora dato (x_0,y_0) in Ω esiste $\delta > 0$ ed esiste una ***unica*** *funzione $y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ tale che $\boxed{y(x_0) = y_0}$, $(x,y(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e y verifica l'equazione*

$$\boxed{y'(x) = F(x,y(x))} \qquad \text{per ogni } x \text{ in }]x_0 - \delta, x_0 + \delta[-$$

FIGURA


Ω
$y(x)$
y_0
(x_0, y_0)
$x_0 - \delta$
x_0
$x_0 + \delta$