ANALISI 1 [1]
VENTUNESIMA LEZIONE
Integrazione delle funzioni razionali

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Integrazione delle funzioni razionali[2]

Consideriamo $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi e

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{funzione razionale}$$

Ci proponiamo di trovare le primitive di f.
Per esempio (si vede facendo i calcoli):

$$f(x) = \frac{1}{x-a} \text{ allora } \int f(x)\,dx = \ln(|x-a|) + cost.$$
$$f(x) = \frac{2x}{x^2+a^2} \text{ allora } \int f(x)\,dx = \ln(x^2+a^2) + cost.$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2} \text{ allora } \int f(x)\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + cost.$$

Vogliamo cercare di ricondurre il caso generale a una somma di addendi del tipo indicato sopra.

[2] vedere anche la nota in rete

Osservazione

Se il grado di P è maggiore o eguale al grado di Q possiamo fare la divisione tra polinomi: si trovano un polinomio P_1 e un polinomio R tali che il grado di R è minore del grado di Q e

$$P(x) = P_1(x)Q(x) + R(x)$$

da cui

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = P_1(x) + f_1(x)$$

dove f_1 è una funzione razionale propria. Dato che il calcolo della primitiva di P_1 è banale possiamo concentrarci solo sul calcolo della primitiva di f_1. Dunque supponendo di avere fatto preliminarmente questa divisione:

$$\boxed{\textit{Possiamo sempre supporre } \mathrm{grado}(P) < \mathrm{grado}(Q)}.$$

Poniamo $n := \text{grado}(Q)$. Il punto cruciale è la **fattorizzazione** di Q. Dall'algebra sappiamo che *visto nei complessi* il polinomio Q ha esattamente n radici, a patto che ogni radice sia contata con la sua molteplicità. Ciò vuole dire che:

$$\exists\, z_1 \neq z_2 \neq \cdots \neq z_k \text{ in } \mathbb{C}, \qquad \exists\, m_1, m_2, \ldots, m_k \text{ in } \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

tali che $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ e

$$\boxed{Q(z) = (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_k)^{m_k}}$$

Scriveremo

$$z_j = x_j + i y_j \qquad \text{con } x_j, y_j \in \mathbb{R} \quad j = 1, \ldots, k.$$

Inoltre, dato che Q è preso a coefficienti reali, per ogni $j = 1, \ldots, k$ vale la seguente alternativa:

$$\begin{cases} z_j \text{ è reale (cioè } y_j = 0) \\ z_j \text{ non è reale e allora anche } \bar{z}_j \text{ è una radice, con la stessa molteplicità} \end{cases}$$

Il procedimento per trovare le primitive di $f = \frac{P}{Q}$ dipenderà dal fatto che le radici siano o non siano reali, e dalla loro molteplicità.

Radici reali semplici

Il caso più fortunato è:

$$\boxed{z_1 = x_1, z_2 = x_2, \dots, z_n = x_n \in \mathbb{R}, \qquad m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1}$$

Notiamo che essendo tutte le radici semplici $k = n$.

Proprietà (Decomposizione in fratti semplici- radici reali semplici)

In questo caso esistono $A_1, A_2, \dots, A_n$ *in* $\mathbb{R}$ *tali che*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

Esempio

$$\int \frac{3 + x}{x^3 - x}\, dx = \int \left(-\frac{3}{x} + \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right) dx.$$

SVOLGIMENTO

Tutte radici sempici non necessariamente reali

Supponiamo ancora che $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$ (sempre $k = m$).
Raggruppiamo le radici mettendo prima quelle reali:

$$z_1 = x_1,\ \ldots,\ z_h = x_h,\ z_{h+1} = x_{h+1} + iy_{h+1},\ \ldots, z_n = x_n + iy_n$$

($y_j = 0$ se $j = 1, \ldots, h$ mentre $y_j \neq 0$ se $j = h+1, \ldots, n$). Come detto prima le z_j per $j = h+1, \ldots, n$ compaiono a coppie coniugate: cambiando notazione le possiamo scrivere come

$$a_1 + ib_1,\ a_1 - ib_1, \ldots a_l + ib_l,\ a_l - ib_l$$

(dove $h + 2l = n$). Notiamo che

$$(x - (a_j + ib_j))(x - (a_j - ib_j)) = x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2 = (x - a_j)^2 + b_j^2$$

è un trinomio di secondo grado senza radici reali, quindi con discriminante negativo.

Proprietà (Decomposizione in fratti semplici - tutte radici semplci)

In questo caso esistono $A_1, A_2, \ldots, A_h$, $B_1, B_2, \ldots, B_l$ *e* $C_1, C_2, \ldots, C_l$ *in* $\mathbb{R}$ *tali che*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_h}{x - x_h} + \frac{B_1 x + C_1}{(x - a_1)^2 + b_1^2} + \cdots + \frac{B_l x + C_l}{(x - a_l)^2 + b_b^2}$$

Esempio

$$\int \frac{3 + x}{x^3 + x}\, dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-3x + 1}{x^2 + 1} \right) dx.$$

SVOLGIMENTO

Caso generale

Nel caso generale possiamo scrivere

$$Q(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_h)^{m_h}((x - a_1)^2 + b_1^2)^{n_1} \cdots ((x - a_l)^2 + b_l^2)^{n_l}$$

con $m_1 + \cdots + m_h + 2n_1 + \cdots + 2n_l = n$. Come prima x_j sono le radici reali mentre $a_j \pm ib_j$ sono le radici non reali (a coppie coniugate).

Proprietà (Decomposizione in fratti semplici)

Esistono $A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}, \ldots, A_{h,1}, \ldots, A_{h,m_h}$, $B_{1,1}, \ldots, B_{1,n_1}, \ldots, B_{l,1}, \ldots B_{l,n_l}$, $C_{1,1}, \ldots, C_{1,n_1}, \ldots, C_{l,1}, \ldots C_{l,n_l}$ *in* $\mathbb{R}$ *tali che*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{x - x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} + \cdots \frac{A_{h,1}}{x - x_x} + \cdots + \frac{A_{h,m_h}}{(x - x_x)^{m_h}} +$$
$$+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x - a_1)^2 + b_1^2} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{((x - a_1)^2 + b_1^2)^2} + \cdots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{((x - a_1)^2 + b_1^2)^{n_1}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{B_{l,1}x + C_{l,1}}{(x - a_l)^2 + b_l^2} + \frac{B_{l,n_l}x + C_{l,n_l}}{((x - a_l)^2 + b_l^2)^2} + \cdots + \frac{B_{l,n_l}x + C_{l,n_l}}{((x - a_l)^2 + b_l^2)^{n_l}}$$

Dunque per trovare la primitiva ci possiamo ricondurre ai seguenti casi:

- $\int \frac{1}{x-x_0}\,dx = \ln(|x-x_0|) + cost.$;
- $\int \frac{1}{(x-x_0)^m}\,dx = \frac{-1}{(m-1)(x-x_0)^{m-1}} + cost.\ (m>1)$;
- $\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx$; questo si divide in due pezzi:

$$\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \int \frac{2B_1(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx + \int \frac{C_1}{(x-a)^2+b^2}\,dx$$

dove $B_1 = B/2$ e $C_1 = C + aB$, che si calcolano dato che:

  - $\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \ln\left((x-a)^2+b^2\right) + cost.$;
  - $\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + cost.$

- $\int \frac{Bx+C}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx$, con $m>1$; questo si divide come prima:

$$\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \int \frac{2B_1(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx + \int \frac{C_1}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx$$

($B_1 = B/2$ e $C_1 = C + aB$) e si nota che

- $\int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx = \frac{-1}{(m-1)((x-a)^2+b^2)^{m-1}} + cost.$
- $\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^m}\,dx = \frac{1}{b^{2m-1}} \int \frac{1}{(y^2+1)^m}\,dy$ dove $y = \frac{x-a}{b}$ e si ha

$$\int \frac{1}{(y^2+1)^m}\,dy = \int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^m}\,dy - \frac{1}{2}\int y\frac{2y}{(y^2+1)^m}\,dy =$$

$$\int \frac{1}{(y^2+1)^{m-1}}\,dy - \frac{y}{2}\frac{-1}{(m-1)(y^2+1)^{m-1}} - \int \frac{1}{2(m-1)(y^2+1)^{m-1}}\,dy =$$

$$\frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{1}{(y^2+1)^{m-1}}\,dy + \frac{y}{2(m-1)(y^2+1)^{m-1}}$$

$\rightarrow$ FORMULA RICORSIVA.

Metodo di Hermite

Ricordiamo che

$$Q(x) = (x-x_1)^{m_1} \cdots (x-x_h)^{m_h} ((x-a_1)^2 + b_1^2)^{n_1} \cdots ((x-a_l)^2 + b_l^2)^{n_l}$$

Proprietà (Decomposizione in fratti semplici secondo Hermite)

Poniamo

$$Q_1(x) = (x-x_1)^{m_1-1} \cdots (x-x_h)^{m_h-1} ((x-a_1)^2 + b_1^2)^{n_1-1} \cdots ((x-a_l)^2 + b_l^2)^{n_l-1}$$

(notiamo che le radici semplici non danno contributo a Q_1). Allora esistono $A_1, \ldots, A_h$, $B_1, \ldots B_l$, $C_1, \ldots, C_l$ in $\mathbb{R}$ e un polinomio P_1 di grado strettamente minore del grado di Q_1 tali che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots \frac{A_h}{x-x_h} + \cdots + \frac{B_1 x + C_1}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \frac{B_2 x + C_2}{(x-a_2)^2 + b_2^2} + \cdots \frac{B_l x + C_l}{(x-a_l)^2 + b_l^2} + \frac{d}{dx} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Esempi

$$\int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx \qquad \int \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,dx \qquad \int \frac{1+x^3}{(1+x^2)x^2}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\,dx \qquad \int \frac{1}{(1+x^3)x^2}\,dx$$

Risposte agli esercizi precedenti

$$\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}x+2}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}x-2}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}x+2}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}x-2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{8}\arctan(x)+\frac{x^3-x}{8(x^2+1)^2}$$

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\arctan(x)-\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{16}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)+\frac{x^3+x}{8(x^2-1)^2}$$

$$\ln\left(\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}}\right)-\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right)-\frac{1}{x}$$

Primitive riconducibili a funzioni razionali

Supponiamo che F sia una funzione razionale di una o più due variabili.

- $\displaystyle\int F\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, con $ad-bc \neq 0$, si riconduce a una funzione razionale mediante la sostituzione $t = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$;
- $\displaystyle\int F\left(x, \sqrt{x^2+\alpha x+\beta}\right) dx$, si riconduce a una funzione razionale mediante la sostituzione $t = \sqrt{x^2+\alpha x+\beta} - x$;
- $\displaystyle\int F\left(e^{ax}\right) dx$, si riconduce a una funzione razionale mediante la sostituzione $t = e^{ax}$;
- $\displaystyle\int F\left(\sin(ax), \cos(ax)\right) dx$, si riconduce a una funzione razionale mediante la sostituzione $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$;
- $\displaystyle\int F\left(\tan(ax)\right) dx$, si riconduce a una funzione razionale mediante la sostituzione $t = \tan(x)$ (più semplice di quella del caso precedente).

Esempi

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx \qquad \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx$$

$$\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-2e^x+1}\,dx \qquad \int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\,dx$$

$$\int \frac{\sin(x)+\cos(x)+1}{\sin(x)-\cos(x)+1}\,dx \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+10}}\,dx$$