ANALISI 1 [1]
VENTESIMA LEZIONE
Integrale secondo Riemann

[1]prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Oltre alla "tabella delle primitive" abbiamo a disposizione i seguenti teoremi.

Teorema (Integrazione per sostituzione)

Sia $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e sia* $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ *derivabile con derivata continua. Allora*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

DIM

Teorema (Integrazione per parti)

Siano f, g, F, G *quattro funzioni continue definite sull'intervallo* $[a,b]$*. Supponiamo che*

$$F'(x) = f(x), \qquad G'(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Allora

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx.$$

DIM

Definizione (funzione integrale)

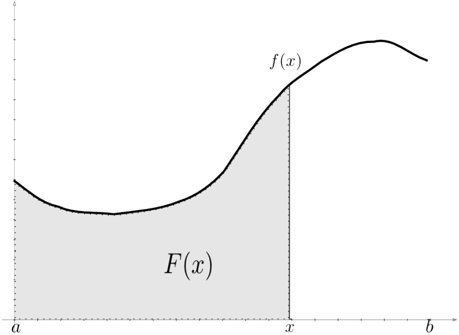
Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabile definiamo la funzione integrale relativa a* f *ponendo:*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

A volte la funzione integrale si definisce prendendo come estremo inferiore di integrazione un generico punto x_0 di $[a, b]$ – in questo caso si dovrebbe allora dire “una ” funzione integrale. È peraltro chiaro che tutte queste definizioni differiscono per una costante, dato che

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt = \int_{x_0}^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt = -\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt$$

Si noti che non si può usare x come variabile di integrazione, visto che la si è utilizzata per esprimere la dipendenza di $F($ da x.

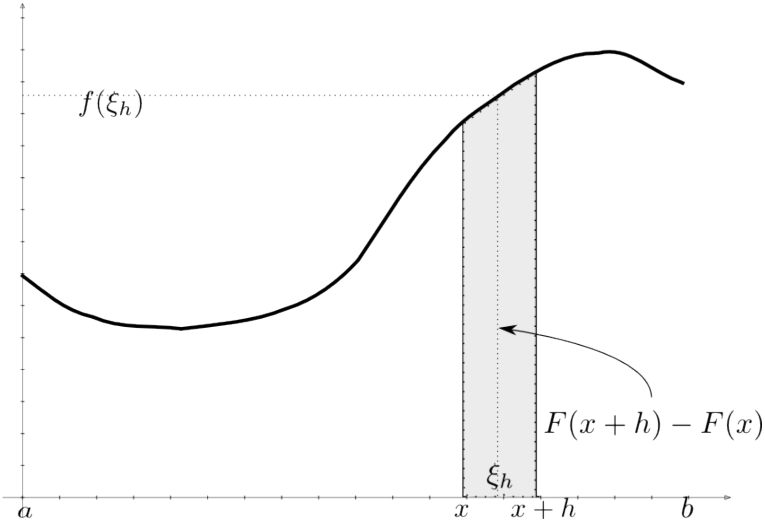


Teorema (Secondo teorema del calcolo integrale o di Torricelli)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile e sia* F *la sua funzione integrale. Allora*

- F *è una funzione continua, anzi è lipschitziana;*
- *se* f *è continua, allora* F *è derivabile e* $F' = f$*, cioè* F *è una primitiva di* f.

DIM



$f(\xi_h)$
$F(x+h) - F(x)$
ξ_h
a
x
$x+h$
b