ANALISI 1 [1]
SEDICESIMA - DICIASETTESIMA LEZIONE
Serie

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Teorema (criterio della radice)

Sia $\{a_n\}$ *una successione di termini non negativi. Supponiamo che esista il limite:*

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \qquad (\geq 0)$$

- *Se* $L < 1$ *allora la serie degli* a_n *converge;*
- *Se* $L > 1$ *allora la serie degli* a_n *diverge*

Teorema (criterio del rapporto)

Sia $\{a_n\}$ *una successione di termini (strettamente) positivi. Supponiamo che esista il limite:*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (\geq 0)$$

- *Se* $L < 1$ *allora la serie degli* a_n *converge;*
- *Se* $L > 1$ *allora la serie degli* a_n *diverge*

- Se $L =$ in uno dei due criteri precedenti, NON SI PUÒ DIR NULLA riguardo alla convergenza ESEMPIO
- Il criterio della radice si basa sul confronto con la serie geometrica DIM – ne segue che se vale tale criterio la successione a_n è MOLTO infinitesima (e la serie converge MOLTO rapidamente). Nella pratica questo non succede spessissimo (ma succede in alcuni casi importanti).
- Il criterio del rapporto implica il criterio della radice a causa del teorema di Cesaro DIM. Dunque valgono le stesse considerazione del caso precedente.

Altre serie notevoli

La somma delle seguenti serie si trova utilizzando gli sviluppi di Taylor.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \text{per ogni } x \text{ reale;}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \qquad \text{per ogni } x \text{ reale;}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x) \qquad \text{per ogni } x \text{ reale;}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha \qquad \text{se } -1 < x < 1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \qquad \text{se } -1 < x < 1;$$

ALCUNE VERIFICHE

Notiamo che per le x buone vale il criterio della radice $\Rightarrow$ ottima convergenza!!

Le serie della pagina precedente suggeriscono il seguente problema:

Problema

Data una funzione f infinitamente derivabile e un punto x_0 è possibile trovare il polinomio di Taylor di ordine n per n qualunque:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Ci si può chiedere se, ***fissato*** *$x \neq x_0$ si abbia*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x).$$

Questo problema *È COMPLETAMENTE DIVERSO* da quello che abbiamo affrontato in precedenza, in cui **fissato** n ci si chiedeva cosa accade per $x \to x_0$. Per quanto visto prima la risposta dipende da f e da x:

- se $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ tutte le x reali vanno bene;
- se $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x_0 = 0$ solo le x in $]-1,1[$ vanno bene;
- si può fare l'esempio di una f per cui solo $x = x_0$ va bene!!!

Serie a segno variabile

Sia $\{a_n\}$ una successione e supponiamo di non avere nessuna informazione sul segno dei suoi termini.
Per studiare la serie degli a_n abbiamo a disposizione due strumenti:

Teorema (Criterio della convergenza assoluta)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$*, allora la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*

Teorema (Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni)

Supponiamo che $a_n = (-1)^n a'_n$ *dove* $a'_n \geq 0$ (*serie a segni alterni*).
Se $\{a'_n\}$ *è decrescente e infinitesima, cioè se*

$$a'_{n+1} \leq a'_n \quad \forall n, \qquad \lim_{n\to\infty} a'_n = 0$$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a'_n$ *è convergente.*

Convergenza assoluta

Il primo dei criteri precedenti suggerisce la seguente definizione.

Definizione

*Data una successione $\{a_n\}$ diciamo che la serie degli a_n è **assolutamente convergente** se la serie dei moduli di a_n converge:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \textit{ converge assolutamente} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \textit{ converge}$$

con questa terminologia il criterio diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

DIM.

Il viceversa NON è vero.
La convergenza assoluta è una proprietà PIÙ FORTE della convergenza (lo vediamo dopo).

Criterio di Leibniz

Teorema

Se $\{a_n\}$ è decrescente e infinitesima, allora $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *converge.*

DIM.

ESEMPI

Osservazione

- *la proprietà che $\{a_n\}$ sia decrescente* ***non si può togliere****;*
- *la proprietà che la serie sia a segni alterni* ***non si può togliere****;*
- *le ipotesi del criterio di Leibniz implicano la convergenza della serie* ***ma non ne implicano*** *la convergenza assoluta.*

  Per esempio la serie armonica a segni alterni: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ *converge per Leibniz, ma non converge assolutamente dato che* $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = +\infty$.

  Questo esempio mostra anche che ***la convergenza non implica la convergenza assoluta****.*

Proprietà commutativa

Sia $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una applicazione bigettiva tra i numeri interi (una "permutazione degli interi"). Diremo che $\{\sigma_n\}$ è un *riarrangiamento degli indici*.

Definizione

Se $\{a_n\}$ è una successione. chiamiamo riordinamento di $\{a_n\}$ mediante σ la successione $\left\{a_{\sigma(n)}\right\}$

Teorema (proprietà commutativa delle serie)

1. *Se $a_n \geq 0$ per ogni n, allora (ammettendo anche valore $+\infty$)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

2. *La stessa proprietà è vera (ora solo tra valori finiti) se la serie degli a_n è assolutamente convergente (che equivale a dire che la serie degli $a_{\sigma(n)}$ è assolutamente convergente).*

La proprietà commutativa è FALSA se la serie non è assolutamente convergente.

Proprietà

Se la serie degli a_n non converge assolutamente, cioè se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = +\infty,$$

allora per qualunque numero reale esteso s esiste un riordinamento di $\{a_n\}$, chiamiamolo $\{a_{\sigma(n)}\}$, tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s$$

IDEA DI DIM.

Dunque la proprietà della convergenza assoluta **è necessaria** per una proprietà che è "naturale" nel caso delle somme finite.

Definizione

Sia $\{a_n\}$ *una successione di numeri reali e sia* $\{\sigma_n\}$ *una successione strettamente crescente di interi tale che* $\sigma_0 = 0$. *Poniamo* $b_n := \sum_{k=\sigma_n}^{\sigma_{n+1}-1} a_k$

Diremo che $\{b_n\}$ *è ottenuta da* $\{a_n\}$ *associando i termini mediante* $\{\sigma_n\}$.

$$\underbrace{a_0 + \cdots + a_{\sigma_1 - 1}}_{b_0} + \underbrace{a_{\sigma_1} + \cdots + a_{\sigma_2 - 1}}_{b_1} + \underbrace{a_{\sigma_2} + \cdots + a_{\sigma_3 - 1}}_{b_2} + \cdots$$

Osservazione

Associando i termini una serie che non converge può diventare convergente. Per es. se $a_n = (-1)^n$ *e* $\sigma_n = 2n$, *allora* $b_n = a_{2n} + a_{2n+1} = 1 - 1 = 0$. *Quindi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ non esiste}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = 0$$

Proprietà associativa

Di nuovo le cose “vanno nel modo giusto” se gli a_n sono positivi o se la serie è assolutamente convergente.

Teorema (Proprietà associativa delle serie)

Sia $\{a_n\}$ *una successione e supponiamo che* $\{b_n\}$ *sia ottenuta da* $\{a_n\}$ *associando i termini.*
Se $a_n \geq 0$ *per ogni n allora:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

(eventualmente con valori infiniti).
L'eguaglianza è vera anche se la serie degli a_n *è assolutamente convergente (e in questo caso i valori sono finiti).*

Serie prodotto

Definizione (Prodotto di Cauchy tra due serie)

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. definiamo per ogni n

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

La serie dei c_n è detta prodotto di Cauchy tra la serie degli a_n e quella dei b_n.

$$\begin{array}{ccccc}
a_0b_4 & a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \\
a_0b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_4b_3 \\
a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & a_4b_2 \\
a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & a_4b_1 \\
a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & a_4b_0 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4
\end{array}$$

Teorema (sul prodotto alla Cauchy tra due serie)

Siano $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni e sia* $\{c_n\}$ *il loro prodotto di Cauchy.*
Allora se $a_n \geq 0$ *e* $b_n \geq 0$ *si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} n_n\right)$$

(eventulamente con valori infiniti).
La stessa eguaglianza vale se la serie degli a_n *e quella dei* b_n *sono assolutamente convererenti (e in questo caso i termini dell'eguaglianza sono valori finiti).*

DIM

Esempio

Avremmo potuto DEFINIRE la funzione esponenziale e^x *mediante la serie*

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Per questo basta far vedere che tale serie converge assolutamente per qualunque valore del parametro x *– cosa che segue subito dal criterio del rapporto:*

$$\frac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|} = \left|\frac{x}{n+1}\right| \to 0$$

Se seguissimo questa strada (che per molti versi è piuttosto comoda) dovremmo ricavare tutte le proprietà di $x \mapsto e^x$ *dalla definizione sopra. Per esempio la proprietà* $e^x e^y = e^{x+y}$ *si deduce dal teorema sul prodotto di Cauchy* VERIFICA.

Serie di potenze

Definizione

*Chiamiamo **serie di potenze**, o serie di Taylor, una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ dove sono assegnate (a_k) una succesione di numeri reali e un numero reale $x_0 \in \mathbb{R}$, mentre x varierà in (opportuni sottoinsiemi di) $\mathbb{R}$. Per semplicità consideriamo sempre $x_0 = 0$, dato che il caso con $x_0 \neq 0$ è perfettamente analogo.*

Studieremo dunque per quali x ha senso considerare

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

cio per quali x la serie scritta destra converge, definendo così una funzione $f(x)$, e che proprietà ha la f cos costruita.

Teorema (Intervallo di convergenza)

Supponiamo che esista

$$l := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(in generale $l \in [0,+\infty]$*). Poniamo*

$$\bar{R} := \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0, \\ \dfrac{1}{l} & \text{se } l \in]0,\infty[, \\ 0 & \text{se } l = +\infty. \end{cases}$$

allora:

- *per ogni* x *con* $|x| < \bar{R}$ *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge assolutamente (e quindi converge);*
- *per ogni* x *con* $|x > \bar{R}$ *la serie non converge.*

DIM Si noti che non si dice nulla (e la situazione è diversa caso per caso) di cosa succeda nei punti $x = \pm\bar{R}$.

Definizione (Raggio convergenza)

Data la successione (a_n) *in* $\mathbb{R}$ *chiamiamo* ***raggio di convergenza*** *della serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *il numero* $\bar{R}$ *(in* $[0,+\infty]$*) ottenuto nel teorema precedente.*

Risulta quindi definita la funzione $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *per ogni* x *in* $]-\bar{R},\bar{R}[$*. Tale intervallo aperto viene detto* ***intervallo di convergenza*** *per la serie (se* $\bar{R}=0$ *tale intervallo vuoto, se* $\bar{R}=+\infty$ *l'intervallo di convergenza coincide con* $\mathbb{R}$*).*

Osservazione

Il raggio di convergenza stato definito solo se esiste il limite di $\sqrt[n]{|a_n|}$ *– in realtà si potrebbe vedere che c' sempre un numero* $\bar{R}$ *con le propriet dette sopra (usando il "massimo limite" invece del limite) e quindi il raggio di convergenza si può definire sempre.*

Teorema (Regolatità delle serie di potenze)

Sia $\{a_n\}$ una successione e supponiamo che il raggio di convergenza $\bar{R}$ della serie di potenze associata agli a_n sia positivo: $\bar{R} > 0$.
Indichiamo

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad -\bar{R} < x < \bar{R}.$$

Allora la funzione f è continua ed è infinitamente derivabile in $]-\bar{R}, \bar{R}[$; inoltre si può derivare sotto il segno di serie:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} \qquad -\bar{R} < x < \bar{R}.$$

La formula scritta sopra ha senso in quanto la serie delle derivate è anch'essa una serie di potenze e ***ha lo stesso raggio di convergenza*** *della serie di partenza.*

Esempio

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Si vede subito che il raggio è uno. Inoltre:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \qquad -1 < x < 1$$

(serie geometrica !!!). La cosa può sembrare strana, visto che $f(x)$ non ha nessuna singolarità né in 1 né in -1.
In reltà la prospettiva giusta da cui affrontare le serie di potenze sarebbe nei ***numeri complessi****. Si potrebbe dimostrare che la regione di convergenza è un disco di raggio $\bar{R}$ (quello di prima). In questo caso $\bar{R} = 1$ e la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad |z| < 1$$

ha due singolarità in $z = \pm i$.