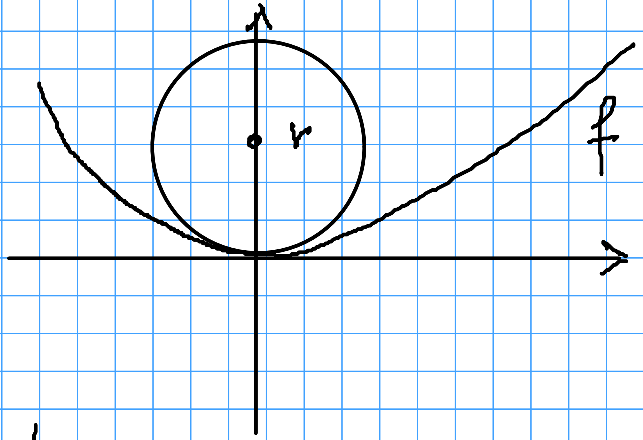
$f(0) = f'(0) = 0 \quad f''(0) > 0$ Prendiamo $r > 0$ e



$$g(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

Il grafico di g descrive la semicirconferenza inferiore nel disegno. Allora:

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad g(0) = 0; \quad g''(x) = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}}, \quad g''(0) = \frac{1}{r} \implies$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = f''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{r}\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Ne segue che:

$$g(x) - f(x) = \left(\frac{1}{r} - f''(0)\right)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

> 0 per x VICINO A 0, $x \neq 0$ nel caso che $r < f''(0)^{-1}$

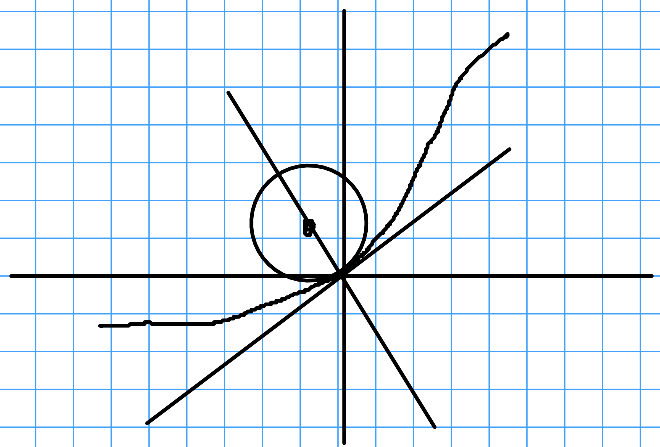
< 0 per x VICINO A 0, $x \neq 0$ nel caso che $r > f''(0)^{-1}$

Si vede dunque che il raggio $R = \frac{1}{f''(0)}$ è quello che discrimina i due comportamenti.

$$R = \frac{1}{f''(0)} = \text{"raggio di curvatura"}$$

$$x^2 + (y-R)^2 = R^2 = \text{equazione del "cerchio osculatore"}$$

Se $f'(0) \neq 0$, si fanno dei calcoli analoghi, mettendo il centro del cerchio sulla retta per $(0,0)$ perpendicolare alla tangente

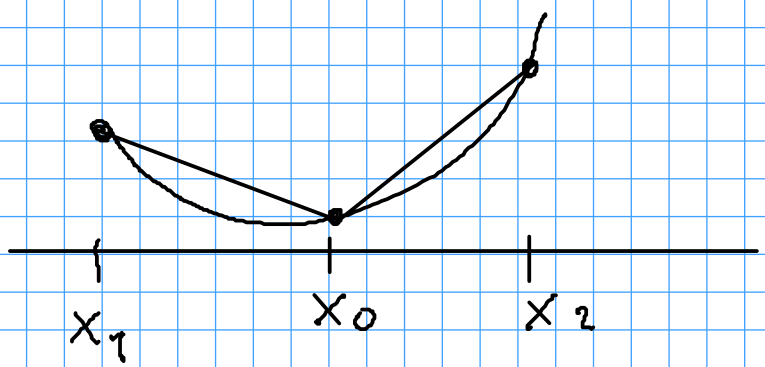


si trovano le formule scritte sui lucidi

CONVESSITÀ

Dim. (f convessa $\Leftrightarrow$ rapporti incrementali crescenti)

Dimostriamo $\Rightarrow$. Siano x_0 fissato e $x_1 < x_2$ due altri punti. Facciamo la dimostrazione nel caso $x_1 < x_0 < x_2$



Scriviamo il punto di mezzo x_0 come "combinazione convessa" tra x_1 e x_2

$$x_0 = t x_2 + (1-t) x_1$$

$$\Updownarrow$$

$$x_0 - x_1 = t(x_2 - x_1) \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad (1-t) = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}.$$

Applichiamo la convessità.

$$f(x_0) \leq t f(x_2) + (1-t) f(x_1) = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow$$

$$(x_2 - x_1) f(x_0) \leq (x_0 - x_1) f(x_2) + (x_2 - x_0) f(x_1)$$

Dato che $(x_2-x_1)f(x_0) = (x_2-x_0)f(x_0) + (x_0-x_1)f(x_0)$ otteniamo

$$(x_2-x_0)\big(f(x_0)-f(x_1)\big) \leq (x_0-x_1)\big(f(x_2)-f(x_0)\big) \iff$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \iff \text{TESI}$$

Per dimostrare il viceverso $(\Leftarrow)$ basta rifare al contrario tutti i passaggi #

CONSEGUENZE

(1) se $x_0 < \sup I$ $\exists\, f'_+(x_0) < +\infty$: per l'esistenza dei limiti dx/sx delle funzioni monotone

$$\exists\, f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \inf_{x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < +\infty$$

(2) se $x_0 > \inf I$ $\exists\, f'_-(x_0)$ (analogo a (1))

(3) se $\inf I < x_0 < \sup I \Rightarrow f$ è continua in x_0

infatti

$$\lim_{x\to x_0^{+/-}} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0^{+/-}}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)(x-x_0) = f'_{+/-}(x_0)\cdot 0 = 0$$

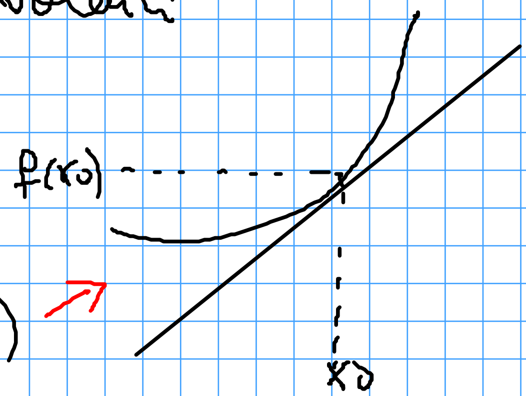
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema Se f è derivabile sono equivalenti:

(a) f è convessa su I

(b) f' è crescente su I

(c) $\forall x_0, x \in I$ $\quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$



Dim. (a) $\Rightarrow$ (b) Fissiamo tre punti $x_1 < x < x_2$ in I

Per la convessità abbiamo visto che

$$(*) \quad \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

Se facciamo tendere x a x_1 (da destra) ricaviamo

$(**)\quad f'(x_1) \le \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \forall\, x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$

Se facciamo tendere x a x_2 (da sinistra) in $(*)$ ricaviamo

$(***)\quad \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$

Da $(**)$ e $(***)$ si ricava $f'(x_1) \le f'(x_2)$ se $x_1 < x_2$ #

$(a) \Rightarrow (c)$ Prendiamo x e x_0 in I. Ci sono due casi

(1) $\underline{x_0 < x}$ usando la $(**)$ con $x_1 = x_0$ e $x_2 = x$

$$f'(x_0) \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{(x-x_0>0)}{\Longrightarrow} f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

(2) $\underline{x_0 > x}$ usando la $(***)$ con $x_1 = x$ e $x_2 = x_0$

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \le f'(x_0) \underset{(x_0-x>0)}{\Longrightarrow} f(x) \ge f(x_0) - f'(x_0)(x_0-x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \#$$

(b) $\Rightarrow$ (a). Dimostriamo che i rapporti incrementali sono crescenti (a partire dalla crescenza della derivata). Siano $x_1 < x_2$, vogliamo

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \le \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad (\star)$$

Consideriamo per esempio il caso $x_1 < x_0 < x_2$ (gli altri sono simili)

Applicando il teorema di Lagrange troviamo

$\xi_1 \in]x_1, x_0[$ tale che $\quad f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$\xi_2 \in]x_0, x_2[$ tale che $\quad f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$

Allora $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow$ VALE $(\star)$

#

(c) $\Rightarrow$ (a) Siano $x_1 < x_2$ in I e $t \in [0,1]$

Poniamo $x_0 = t x_2 + (1-t) x_1$.

Applicando l'ipotesi con $x = x_1$ e $x = x_2$ otteniamo

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$$

Moltiplichiamo la prima riga per $(1-t)$, la seconda per t e sommiamo:

$$t f(x_2) + (1-t) f(x_1) \geq (t+1-t) f(x_0) + f'(x_0)\left(t x_2 + (1-t) x_1 + (t+1-t) x_0\right) =$$
$$f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0) =$$
$$f(t x_2 + (1-t) x_1)$$

Quindi f è convessa #