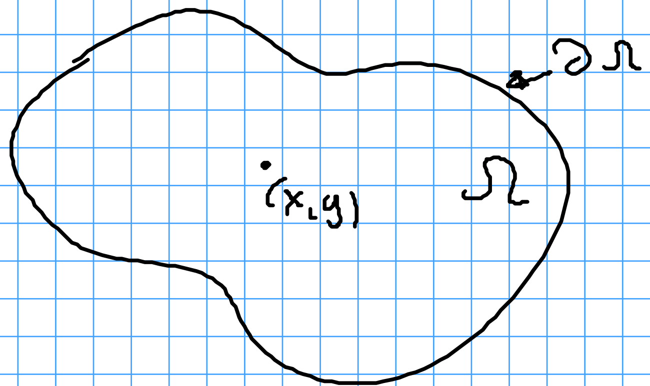
Equazione della "membrana" vibrante $\to$ equivalente della corda in dimensione 2.

$$u(\underset{\uparrow}{t}, \underbrace{x, y}) \to \text{altezza della membrana}$$

tempo   posizione $\in \Omega$ dominio in $\mathbb{R}^2$



$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \Delta u \right. \quad \text{(EQUAZIONE)}$$

(Laplaciano "spaziale")

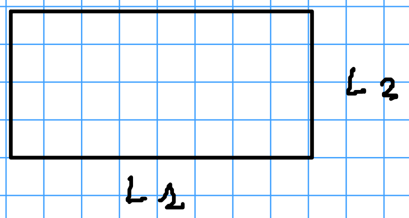
eventuale termine $f(t, x, y)$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, x, y) = u_0(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0, x, y) = v_0(x, y) \end{array} \right. \leftarrow \text{assegnate} \quad \text{(CONDIZIONI INIZIALI)}$$

$$\left\{ u(t, x, y) = 0 \quad \text{se } (x, y) \in \partial\Omega \right. \quad \text{(CONDIZIONE AL CONTORNO)}$$

CASO MEMBRANA RETTANGOLARE

$$\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$$



Come nel caso del calore circa: $\omega_1 = \frac{\pi}{L_1}$, $\omega_2 = \frac{\pi}{L_2}$

$$u(t, x, y) = \sum_{n,m} u_{nm}(t) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$$

Faccio dei discorsi "formali" (si giustificano sotto opportune ipotesi che non trattiamo ...)

- Deriva rispetto a t:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x, y) = \sum_{n,m} u''_{n,m}(t) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$$

SOMMO
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x, y) = \displaystyle\sum_{n,m} u_{nm}(t) \left(-n^2\omega_1^2\right) \sin(\omega_1 n x) \sin(\omega_2 m y) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, x, y) = \displaystyle\sum_{n,m} u_{nm}(t) \sin(n\omega_1 x) \left(-m^2\omega_2\right) \sin(\omega_2 m y) \end{cases}$$

$$\Delta u(t,x,y) = \sum_{n,m} -\left(n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2\right) u_{nm}(t) \sin(\omega_1 n x)\sin(\omega_2 m y)$$

IMPONGO CHE $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ e poso alle coeff n, m

$$u''_{nm}(t) = -\underbrace{(n^2\omega_1 + m^2\omega_2)}_{\omega_{nm}} u_{nm}(t) \quad \forall n, m$$

$$\Rightarrow \quad u_{nm}(t) = A_{nm}\cos(\omega_{nm} t - \theta_{nm}) =$$
$$= \alpha_{nm}\cos(\omega_{nm} t) + \beta_{nm}\sin(\omega_{nm} t)$$

dove A_{nm} e θ_{nm} si ottengono (UNIVOCAMENTE) dalle condizioni iniziali a partire dagli sviluppi in serie di Fourier (doppi) di u_0 e v_0

IN DEFINITIVA

$$\boxed{u(t,x,y) = \sum_{n,m} A_{nm}\cos(\omega_{nm} t - \theta_{nm})\sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)}$$

$\Big($dove A_{nm} e $\theta_{nm} = \dots\Big)$ $\qquad \omega_{nm} = n^2\omega_1 + m^2\omega_2$

QUESTO MOSTRA CHE $u(t,x,y) = \sum \phi_{nm}(t)\,\psi_{nm}(x,y)$

(= sovrapposizione di "soluzioni fondamentali")

tali "sol. fond" sono $\Phi_{nm}(t)$ $\Psi_{nm}(x,y)$

Φ_{nm} periodico in t di freq. ω_{nm}

$\Psi_{nm}(x,y) = \Psi_{1,n,m}(x)\,\Psi_{2,n,m}(y)$)

(NEL CASO DELLA CORDA C'ERA UN RISULTATO SIMILE, "migliore"

$\Phi_n(t)\,\Psi_n(x)$

Φ_n frequenza $n\omega$ (tutte armoniche)

$n\omega = n\frac{\pi}{L}$

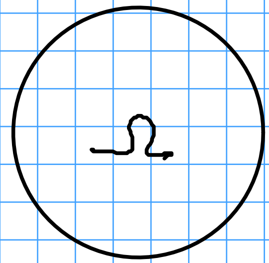
NEL CASO DEL TAMBURO "NON CI SONO LE ARMONICHE"

OSSERVAZIONE I "modi" fondamentali sono delle soluzioni della forma $\Phi(t)\,\Psi(x,y)$ $\left(= \Phi(t)\,\Psi_1(x)\,\Psi_2(y)\right)$

= soluzioni a "variabili separate"

STUDIAMO ORA IL CASO DEL TAMBURO CIRCOLARE

Seguiamo l'idea della "separazione delle variabili", cioè cerchiamo delle soluzioni



$$u(t,x,y) = \phi(t)\,\psi(x,y)$$

(La speranza è che le soluzioni trovate in questo modo permettano di generare tutte le sol. possibili (come nel caso rettangolare)),

Impongo che $u(t,x,y) = \phi(t)\,\psi(x,y)$ risolva

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \Delta u$$

. È chiaro che

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \phi''(t)\,\psi(x,y) \quad \Longrightarrow$$

$$\Delta u = \Phi(t)\,\Delta\psi(x,y)$$

$$\phi''(t)\,\psi(x,y) = \phi(t)\,\Delta\psi(x,y)$$

Divido per $\phi(t)\,\psi(x,y)$ (sperando che sia $\neq 0$)

$$\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \frac{\Delta\psi(x,y)}{\psi(x,y)} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

dipende solo da t — dipende solo da (x,y) $\Longrightarrow$ deve esistere una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \frac{\Delta\psi(x,y)}{\psi(x,y)} = c \iff$$

$$\phi''(t) = c\,\phi(t) \quad (1) \qquad \text{e} \qquad \Delta\psi(x,y) = c\,\psi(x,y) \quad (2)$$

$(+ \ \psi(x,y) = 0 \text{ su } \partial\Omega)$

Guardiamo l'eq. 2

Dico che $\underline{\underline{c < 0}}$ (gli "autovalori" di Δ sono negativi)
(se $\psi \neq 0$)

__Dim.__ Suppongo che valga la (2) con $\psi \neq 0$. Moltiplico l'eq per $\psi(x,y)$ e integro su Ω $\Longrightarrow$

$$\int_\Omega \Delta\psi\ \psi\ dx\,dy = c\int \psi^2\, dx\,dy \qquad (3)$$

Notiamo che $\operatorname{div}(\psi\nabla\psi) = \nabla\psi\cdot\nabla\psi + \psi \operatorname{div}(\nabla\psi) =$

$$\left(\operatorname{div} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}\right) \qquad |\nabla\psi|^2 + \psi\,\Delta\psi$$

Dunque

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\psi\nabla\psi)\,dx\,dy = \int_\Omega |\nabla\psi|^2\,dx\,dy + \int_\Omega \psi\,\Delta\psi\,dx\,dy =$$

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2\,dx\,dy + c\int \psi^2\,dx\,dy \qquad \text{(usando la (3))}$$

Ma $\int_\Omega \operatorname{div}(\psi\nabla\psi)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \psi(x,y)(\nabla\psi\cdot\vec{\nu})\,ds = 0$

perché $\psi(x,y) = 0$ su $\partial\Omega$. Dunque

$$\underbrace{c\int_\Omega \psi^2\,dx\,dy}_{\neq 0} = -\underbrace{\int_\Omega |\nabla\psi|^2\,dx\,dy}_{\neq 0} \Rightarrow \boxed{c < 0} \quad \#$$

NE SEGUE CHE $\boxed{c = -\omega^2}$

e $\qquad \phi(t) = A\cos(\omega t - \theta)$

COME È FATTA LA PARTE IN (x,y), cioè $\psi(x,y)$

D'ORA IN POI USO LA FORMA DI Ω.

(Se considerassi $\Omega = [0,L_1]\times[0\,L_2]$ potrei cercare

$\psi(x,y) = \psi_1(x)\,\psi_2(y)$ e ritroverei quanto già visto con Fourier)

$\Omega_R =$ Disco di centro $(0,0)$ e raggio R;

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta\psi = -\omega^2\psi & \text{su } \Omega_R \\ \psi(x,y) = 0 & \text{su } \partial\Omega_R = \text{circonferenza di raggio } R. \end{cases}$$

Passo a coordinate polari, pongo $\psi_1(\rho,\theta)$ tale che

$$\psi(\rho\cos\theta, \rho\sin(\theta)) = \psi_1(\rho,\theta)$$

devo capire che equazione verifica $\psi_1(\rho,\theta)$

$$\psi_1(\rho,\theta) = \psi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\psi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x}(\text{—})\cos(\theta) + \frac{\partial}{\partial y}\psi(\text{—})\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\psi_1 = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(\text{—})\cos^2(\theta) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\psi(\text{—})\cos(\theta)\sin(\theta) +$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\psi(\text{—})\cos(\theta)\sin(\theta) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(\text{—})\sin^2(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_1 = \frac{\partial}{\partial x}\psi(\text{—})(-\rho\sin(\theta)) + \frac{\partial}{\partial y}\psi(\text{—})(\rho\cos(\theta))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\psi_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(\text{—})(\rho^2\sin^2(\theta)) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\psi(\text{—})(-\rho^2\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(\text{—})(-\rho\cos\theta)$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\psi(\text{—})(-\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(\text{—})(\rho^2\cos^2\theta) + \frac{\partial}{\partial y}\psi(\text{—})(-\rho\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi_1}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2} = \Delta\psi - \frac{1}{\rho}\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\psi(\text{—})\cos(\theta) + \frac{\partial}{\partial y}\psi(\text{—})\sin\theta}_{=\frac{\partial}{\partial\rho}\psi_1(\text{—})}\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\psi_1 = \Delta\psi}$$

Laplaciano in coordinate polari

$\Rightarrow$ in Ψ_1 trovo l'eq.

$$(4)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 \Psi_1}{\partial^2 \theta} = -\omega^2 \Psi_1 \\ \Psi_1(R) = 0 \qquad \Psi_1 \ \theta \text{ periodica di periodo } 2\pi \end{cases}$$

Separiamo le variabili ρ e θ : cerco $\Psi_1(\rho,\theta) = V(\rho)W(\theta)$

$$V''(\rho)\,W(\theta) + \frac{1}{\rho}V'(\rho)\,W(\theta) + \frac{1}{\rho^2}V(\rho)\,W''(\theta) = -\omega^2 V(\rho)W(\theta)$$

divido per $V(\rho)W(\theta)$ e moltiplico per ρ^2

$$\rho^2\frac{V''(\rho)}{V(\rho)} + \rho\frac{V'(\rho)}{V(\rho)} + \frac{W''(\theta)}{W(\theta)} + \rho^2\omega^2 = 0$$

$$\rho^2\frac{V''(\rho)}{V(\rho)} + \rho\frac{V'(\rho)}{V(\rho)} + \rho^2\omega^2 = -\frac{W''(\theta)}{W(\theta)} = c \quad (\text{costante})$$

(5) $\rho^2 V''(\rho) + \rho V'(\rho) + \rho^2 \omega^2 V(\rho) = c V(\rho)$ + $V(R) = 0$

(6) $W''(\theta) = -c W(\theta)$ + W 2π-periodico

Dalla (6) trovo che $c > 0$ anzi $\boxed{c = m^2}$ con $m \in \mathbb{N}$

e $W(\theta) = B \cos(m\theta - \theta_0)$

Allora nella (5) posso mettere $c = m^2$

(5') $\rho^2 V'' + \rho V' + (\rho^2 \omega^2 - m^2) V = 0$

somiglia all'eq. di Bessel, ma c'è un ω^2 di troppo.

Pongo $V(\rho) = V_1(\omega \rho)$ $\left(V_1(r) = V\left(\frac{r}{\omega}\right) \right)$

$r = \omega \rho$ $\rho = \frac{r}{\omega}$

$V'(\rho) = V_1'(\omega \rho) \cdot \omega$, $V''(\rho) = V_1''(\omega\rho) \omega^2$

sostituendo nell'equazione

$$\rho^2 \omega^2 V_1''(\omega\rho) + \rho\omega V_1'(\omega\rho) + (\omega^2\rho^2 - n^2) V_1(\omega\rho) = 0$$

cioè $(r = \rho\omega)$

$$r^2 V_1''(r) + r V_1'(r) + (r^2 - n^2) V_1(r) = 0 \qquad (\underline{\underline{\text{Bessel-}n}})$$

$$V_1(\omega R) = 0$$

$\Rightarrow$ ωR DEVE ESSERE UNO ZERO DI $J_n(r)$

$\Rightarrow$ $\omega R = z_{n,m}$ per un qualunque $m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\omega = \omega_{n,m} = \frac{z_{n,m}}{R}} \quad \text{e} \quad V_1(r) = \alpha J_n(r)$$

ALLA FINE

$$V(\rho) = \alpha J_n\left(\frac{z_{n,m}}{R}\rho\right) = \alpha J_n(\omega_{n,m}\rho)$$

e

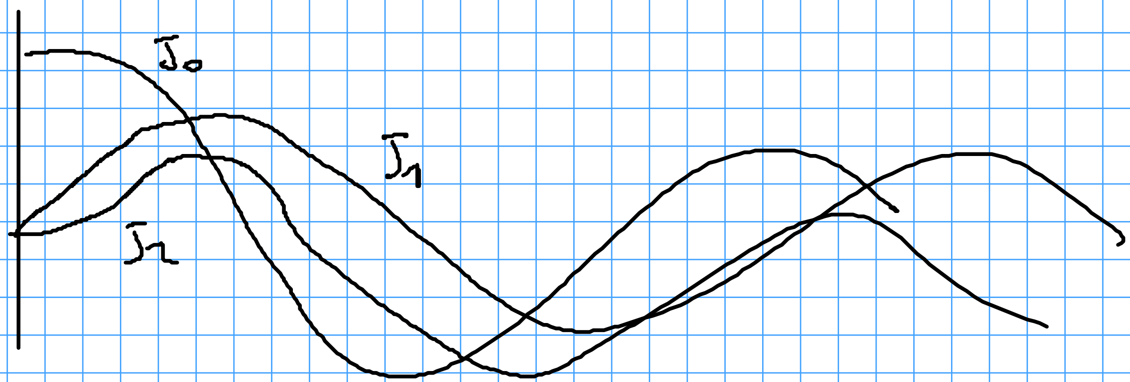
$$\Psi_1(\rho,\theta) = A\cos(\omega_{n,m}\theta - \theta_0)\, J_m(\omega_{n,m}\rho)$$

e "$U(t,\rho,\theta)$" $= A\cos(\omega_{nm} t - t_0)\cos(m\theta - \theta_0)\, J_m(\omega_{nm}\rho)$

$m \geq 0$

$n \geq 1$

MODI DEL TAMBURO CIRCOLARE



($m=0$ [illegible] sono RADIALI)