$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u + f(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$\omega = \frac{\pi}{L}$$

CERCO $\displaystyle u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \sin(m\omega x)$

sapendo che $\displaystyle u_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_n \sin(m\omega x)$

e $\displaystyle f(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin(m\omega x)$

$$\dashrightarrow \boxed{u_m'(t) = -m^2\omega^2 u_m(t) + f_m(t)}$$

(Ricordiamo che $y' = a(x)y + b(x) \longrightarrow$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(y(0) + \int_0^x e^{-A(s)} b(s)\,ds\right)$$

$$A(x) = \int_0^x a(s)\,ds$$
)

$$\Rightarrow \quad u_n(t) = e^{-n^2\omega^2 t}\Big(\underbrace{u_n(0)}_{A_n} + \int_0^t f_n(s)\, e^{n^2\omega^2 s}\, ds\Big)$$

DUNQUE DOVREBBE VENIRE (caso $\underline{\underline{f=0}}$ per semplicità)

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-n^2\omega^2 t} \sin(n\omega x)} \quad (\star)$$

VEDIAMO CHE $(\star)$ DEFINISCE EFFETTIVAMENTE UNA SOL. DELL'EQ. (1) (con $f=0$)

SIA $t_0 > 0$ FISSATO

• u è derivabile infinite volte rispetto a x e

la $\dfrac{\partial^h}{\partial x^h} u(t_0,x) = \sum$ derivate h-esime

Per questo basta vedere che $\sum \left| A_n e^{-n^2\omega^2 t_0} \right| n^h < +\infty$

QUESTO È VERO DATO CHE $e^{-n^2\omega^2 t_0}$ "VINCE" SU n^h

$$\sum e^{-m\varepsilon} m^k < +\infty \quad , \text{ e tanto più } \quad (\varepsilon > 0)$$

$$\simeq \sum e^{-m^2\varepsilon} m^k < +\infty$$

- Stesso discorso rispetto a t : (h volte)

Fisso $t_0 > 0$, $h \in \mathbb{N}$, $u(t,x)$ è derivabile h volte in $\{t > t_0\}$

e $\frac{\partial^h}{\partial t^h} u(t,x) = \sum$ derivate (in t)

<u>CASO $h=1$</u> Basta dim. che

$$\sum_{m=1}^{\infty} -m^2\omega^2 e^{-m^2\omega^2 t} A_n \sin(n\omega x) \text{ è unif. conv. su } [t_0, +\infty[$$

$$\Uparrow$$

$\sum_1^{\infty} -m^2\omega^2 e(\ldots)$ è totalmente conv. cioè

$$\sum_1^{\infty} m^2\omega^2 e^{-m^2\omega^2 t_0} |A_n| < +\infty$$

$$\boxed{\max_{t \geq t_0} m^2\omega^2(\ldots)}$$

QUESTO FATTO È VERO PERCHÉ "L'ESPONENZIALE VINCE"

IN PARTICOLARE $\forall t>0, \forall x$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \sum_1^{\infty} -m^2\omega^2 e^{-m^2\omega^2 t} A_n \sin(n\omega x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) = \sum -m^2\omega^2 e^{-m^2\omega^2 t} A_n \sin(n\omega x)$$

(sempre per la conv. unif. in x)

$\Rightarrow$ VALE L'EQ. E $u(t,0) = u(t,L) = 0$

(e so anche che la sol. è "ULTRAREGOLARE")

RIMANE DA CAPIRE SE $\boxed{u(0,x) = u_0(x)}$??

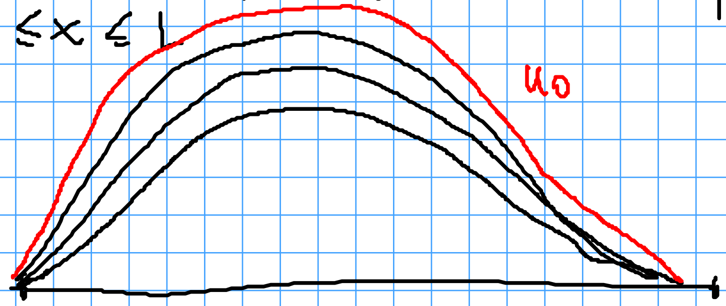
- DUE CASI - (senza dimostrazione)

1. suppongo di sapere che $\sum |A_n| < +\infty$ ($\Rightarrow u_0$ continua e nulla in $0, L$)

Se pongo $u_t(x) = u(t,x) \Rightarrow u_t \to u_0$ unif.

cioè

$$\max_{0 \le x \le 1} |u(t,x) - u_0(x)| \xrightarrow{t \to 0} 0$$



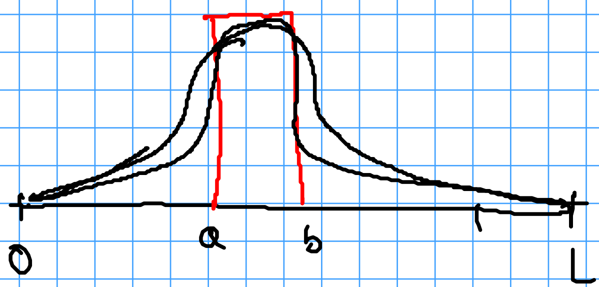
IN PARTICOLARE PER X FISSATO

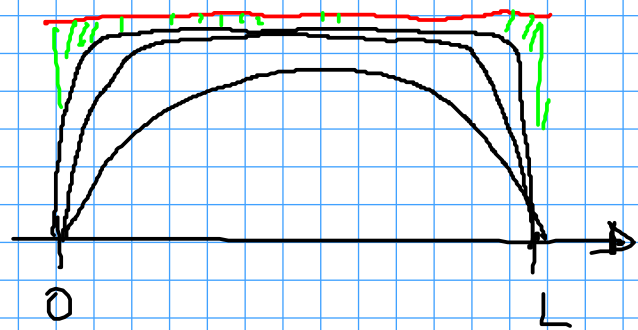
$$u(t,x) \to u_0(x)$$

(2) $u_0 \in L^2([0,L])$ IN QUESTO CASO SI TROVA

$$\|u_t - u_0\|_{L^2} \to 0$$ CIOÈ

$$\int_0^L |u(t,x) - u_0(x)|^2 \, dx \xrightarrow{t \to 0} 0$$



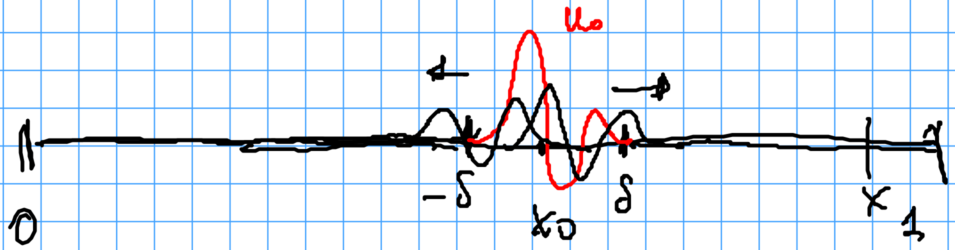


EQ. ONDE L'eq. delle onde ha velocità "di propagazione" finita $(= c)$

Se $u_0 = 0$ fuori da $[x_0 + \delta, x_0 - \delta]$

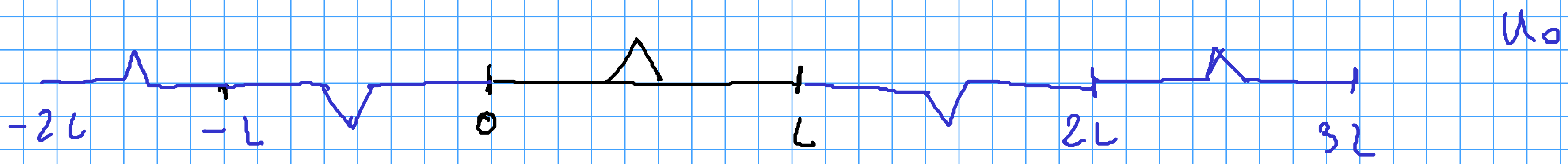
$v_0 = 0$

$$u(t,x) = w_1(x + ct) + w_2(x - ct)$$

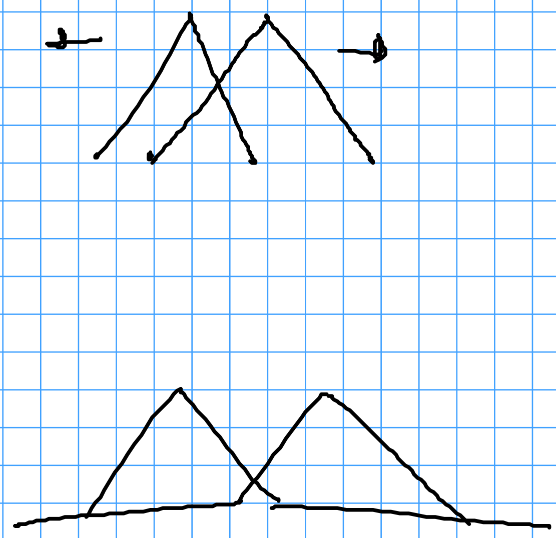


Se x_1 lontano da x_0, non vedo nulla prima di un tempo > 0

SI PUÒ VEDERE CHE C'È UN "RIMBALZO" AGLI ESTREMI



$$u(t,x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2}$$



$t > 0$