Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 10 luglio 2006

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matr. ____________________

1. Si consideri la serie di potenze $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2}$.
   (a) Si trovi il raggio di convergenza della serie.
   (b) Se z è interno al disco di convergenza si trovi l'espressione esplicita di $f(z)$.
2. Si calcoli $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3-x^2}{(4x^2+1)^2}\,dx$
3. Si consideri il problema:
$$\begin{cases} y'' + 4y = b(t) & \text{in }]0, 2\pi[\\ y(0) = y(2\pi) = 0. \end{cases} \qquad \text{dove } b(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in [0, \pi] \\ 2\pi - t & \text{se } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$
   Si dica se esiste una soluzione y, se la soluzione è unica e si esprima ogni possibile soluzione mediante una serie di Fourier (opportuna).
4. Si trovi la soluzione del problema:
$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = e^{-|t|} \\ y \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$
5. Si trovino tutte le soluzione del problema (nelle distribuzioni):
$$\begin{cases} y'' + 4y = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Risoluzione

1. Per trovare il raggio di convergenza R bisogna calcolare:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+2}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

A questo punto conviene porre $g(z) := z^2 f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{n+2}$; usando le proprietà delle serie di potenze, per $|z| < 1$ si ha:

$$g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \frac{z^{n+1}}{n+2} = z \sum_{n=0}^{\infty} z^n = z \frac{1}{1-z}$$

(si è sfruttata la formula che dà la somma della serie geometrica). Dato che $g(0) = 0$

$$g(z) = \int_0^z g'(s)\, ds = \int_0^s \frac{s}{1-s}\, ds = -z - \ln(1-z)$$

e quindi

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2} = -\frac{z + \ln(1-z)}{z^2}$$

Si noti che, nonostante lo z^2 al denominatore, la formula per f scritta sopra ha senso anche in $z = 0$, dato che (usiamo il teorema dell' Hospital)

$$\lim_{z\to 0} -\frac{z + \ln(1-z)}{z^2} = \lim_{z\to 0} -\frac{1 - \frac{1}{1-z}}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{z}{1-z}}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}$$

che torna con la definizione di f mediante la serie (mettendo $z = 0$ nella serie rimane solo il primo termine che fa proprio $1/2$).

2. Per fare l'integrale usiamo il metodo dei residui. Se $f(z) := \frac{3 - z^2}{(4z^2+1)^2}$ è chiaro che f ha due poli doppi uno in $i/2$ e l'altro in $-i/2$. Dato che $zf(z) \to 0$ per $|z| \to \infty$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i/2) = -2\pi i \mathrm{Res}(f, -i/2)$$

Usiamo la prima formula. Si ha $f(z) = \frac{3 - z^2}{16(z - i/2)^2 (z + i/2)^2}$ e dunque:

$$\mathrm{Res}(f, i/2) = \frac{d}{dz} \frac{3 - z^2}{16(z + i/2)^2}\bigg|_{z=i/2} = \frac{1}{16} \frac{-2z(z+i/2)^2 - (3 - z^2)2(z + i/2)}{(z + i/2)^4}\bigg|_{z=i/2} =$$

$$\frac{1}{16} \frac{-i(i)^2 - (3 - (i/2)^2)2(i)}{(i)^4} = \frac{1}{16}(i - (3 + 1/4)2i) = -\frac{11}{32} i$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi \left(-\frac{11}{32}\right) i = \frac{11}{16}\pi$$

3. Se cerchiamo la soluzione come serie di Fourier in soli seni (con valori nulli agli estremi dell'intervallo $[0, 2\pi]$), dobbiamo scrivere $y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin(\frac{k}{2}t)$.

   Si ha allora $(-\frac{k^2}{4} + 4)y_k = b_k$ dove b_k sono i coefficienti di Fourier della funzione $b(t)$ sull'intervallo rispetto alle funzioni $\sin(\frac{k}{2}t)$, cioè:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} b(t) \sin\left(\frac{k}{2}t\right)\, dt$$

   e quindi:

$$\pi b_k = \int_0^{\pi} t \sin\left(\frac{k}{2}t\right)\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t) \sin\left(\frac{k}{2}t\right)\, dt = \left[-t\frac{2}{k}\cos\left(\frac{k}{2}t\right)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{k}{2}t\right)\, dt +$$
$$\left[-(2\pi - t)\frac{2}{k}\cos\left(\frac{k}{2}t\right)\right]_{\pi}^{2\pi} - \frac{2}{k}\int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{k}{2}t\right)\, dt = -\frac{2\pi}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{4}{k^2}\left[\sin\left(\frac{k}{2}t\right)\right]_0^{\pi} +$$
$$\frac{2\pi}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{4}{k^2}\left[\sin\left(\frac{k}{2}t\right)\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{8}{k^2}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

   In altri termini $b_k = 0$ se k è pari, mentre $b_{2h+1} = (-1)^h \dfrac{8}{\pi(2h+1)^2}$.

   La condizione $(-\frac{k^2}{4} + 4\pi)y_k = b_k$ scritta per $k = 4$ implica che $b_4 = 0$, ma questo è verificato, per quanto appena visto (4 è pari). Se ne deduce:

$$y(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h 8}{\pi(2h+1)^2} \sin\left(\frac{2h+1}{2}t\right) + \bar{y}\sin(2t) \qquad \bar{y} \in \mathrm{R}$$

4. Passiamo alle trasformate di Fourier. Se $b(t) = e^{-|t|}$ è noto (vedi lezione) che $\hat{b}(\omega) = \dfrac{2}{\omega^2 + 1}$. Dall'equazione e dalle proprietà della trasformata si deduce che

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{b}(\omega)}{(-\omega^2 - i\omega - 2)} = \frac{-2}{(\omega^2 + i\omega + 2)(\omega^2 + 1)} = \frac{-2}{(\omega + 2i)(\omega + i)(\omega - i)^2}$$

   Dunque $\hat{y}(\omega)$, come funzione complessa, ha tre poli $-2i$, $-i$ (semplici) e i (doppio). Allora:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\hat{y}(\omega)e^{i\omega t}, i\right) & \text{se } t \geq 0 \\ -2\pi i \sum\limits_{w=-i,-2i} \operatorname{Res}\left(\hat{y}(\omega)e^{i\omega t}, w\right) & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

   Calcoliamo i residui:

$$\operatorname{Res}\left(\hat{y}(\omega)e^{i\omega t}, -i\right) = \left.\frac{-2e^{i\omega t}}{(\omega + 2i)(\omega - i)^2}\right|_{\omega=-i} = \frac{e^t}{2i}$$
$$\operatorname{Res}\left(\hat{y}(\omega)e^{i\omega t}, -2i\right) = \left.\frac{-2e^{i\omega t}}{(\omega + i)(\omega - i)^2}\right|_{\omega=-2i} = -\frac{2e^t}{9i}$$
$$\operatorname{Res}\left(\hat{y}(\omega)e^{i\omega t}, i\right) = \left.\frac{d}{d\omega}\frac{-2e^{i\omega t}}{(\omega + 2i)(\omega + i)}\right|_{\omega=i} = \left.\frac{-2ite^{i\omega t}(\omega + 2i)(\omega + i) + 2e^{i\omega t}(2\omega + 3i)}{(\omega + 2i)^2(\omega + i)^2}\right|_{\omega=i} =$$
$$\frac{-2ite^{-t}(3i)(2i) + 2e^{-t}(2i + 3i)}{(i + 2i)^2(i + i)^2} = \frac{12ite^{-t} + 10ie^{-t}}{36} = \frac{1}{3}ite^{-t} + \frac{5}{18}ie^{-t}$$

In definitiva,

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}te^{-t} - \frac{5}{18}e^{-t} & \text{se } t \geq 0 \\ \frac{2}{9}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

5. Applichiamo la trasformata di Fourier:

$$(-\omega^2 + 4)\hat{y}(\omega) = \hat{\delta} = 1$$

da cui, per le proprietà delle distribuzioni

$$\hat{y}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 - 4} + c_1\delta(\omega+2) + c_2\delta(\omega-2) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\omega+2} - \frac{1}{\omega-2}\right) + c_1\delta(\omega+2) + c_2\delta(\omega-2)$$

per c_1, c_2 costanti arbitrarie. Dato che la trasformata di $u(t) = \text{sgn}(t)$ è $\hat{u}(\omega) = \dfrac{2}{i\omega}$ si deduce che l'antitrasformata di $\dfrac{1}{\omega}$ è $\frac{i}{2}\text{sgn}(t) = -\frac{1}{2i}\text{sgn}(t)$. Sempre per le proprietà della trasformata si vede che la trasformata di $e^{i\omega_0 t}\text{sgn}(t)$ è $\dfrac{2}{i(\omega - \omega_0)}$. Quindi l'antitrasformata di $\dfrac{1}{\omega - 2}$ è $-\dfrac{1}{2i}e^{i2t}\text{sgn}(t)$ e analogamente l'antitrasformata di $\dfrac{1}{\omega+2}$ è $-\dfrac{1}{-2i}e^{i2t}\text{sgn}(t)$. Allora

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2i}(e^{2it} - e^{-2it})\text{sgn}(t)\right) + \frac{c_1}{2\pi}e^{-2it} + \frac{c_2}{2\pi}e^{2it} = \frac{\text{sgn}(t)}{4}\sin(2t) + d_1\sin(2t) + d_2\cos(2t)$$

per d_1 e d_2 costanti arbitrarie.
Facciamo la verifica: è chiaro che i termini $d_1\sin(2t) + d_2\cos(2t)$ sono soluzioni dell'omogenea e quindi verifichiamo solo che $u = \dfrac{\text{sgn}(t)}{4}\sin(2t)$ è una soluzione particolare. È anche chiaro che la funzione $\text{sgn}(t)$ ha come derivata 2δ. Allora (usiamo la derivata del prodotto) si ha

$$\begin{aligned} u' &= \frac{2\delta}{4}\sin(2t) + \frac{\text{sgn}(t)}{4}2\cos(2t) = \frac{\delta}{2}\sin(0) + \frac{\text{sgn}(t)}{2}\cos(2t) = \frac{\text{sgn}(t)}{2}\cos(2t) \\ u'' &= \frac{2\delta}{2}\cos(2t) - \frac{\text{sgn}(t)}{2}2\sin(2t) = \delta\cos(0) - \text{sgn}(t)\sin(2t) = \delta - 4u \end{aligned}$$