Esercizi su convergenza uniforme, serie di potenze e teorema dei residui

1. Date le seguenti successioni di funzioni f_n si veda se convergono puntualmente e in tal caso si trovi il limite puntuale $f(x) = \lim f_n(x)$. Si dica poi se le f_n convergono uniformemente a f (su tutto $\mathbb{R}$ oppure su qualche intervallo $[a, b]$) e se le derivate di f_n convergono (in qualche senso) alla derivata di f.
$$f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right), \qquad f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx),$$
$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin(nx), \qquad f_n(x) = ne^{-nx^2}$$

2. Date le seguenti serie di funzioni si dica se sono sommabili puntualmente e/o uniformemente (su qualche intervallo $[a, b]$) e se si può derivare per serie.
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+nx^4}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{1+x^n}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

3. Si calcolino i seguenti integrali.
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+3x^2+3x^4+x^6)}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+1}{(x^2+1)^3}\,dx$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{4+4x^2+x^4}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(9+x^2)^2}\,dx.$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+2x^2+x^4)(2+2x+x^2)}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(4+x)^2(9+x)}\,dx$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{(x^2-2x+2)}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2x}{(2-2x+x^2)^2(5+2x+x^2)}\,dx$$
$$\int_\gamma \frac{(2+z)^5}{\sin(z^2)\sin(z)^2}\,dz \qquad \text{dove:} \qquad \gamma(\theta) = \sqrt{2}e^{i\theta},\ 0 \le t \le 2\pi$$
$$\int_\gamma \frac{e^z}{e^{z^2}-z^2-1}\,dz \qquad \text{dove:} \qquad \gamma(\theta) = e^{i\theta},\ 0 \le t \le 2\pi$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(8+x^3)}\,dx$$

4. Per ognuna delle seguenti serie di potenze si trovi il raggio di convergenza e si cerchi di calcolare la somma della serie per z interno al disco di convergenza.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{(n-3)!n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(z^2+1)^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n+1}$$