INGEGNERIA ENERGETICA/ELETTRICA/NUCLEARE
COMPITO DI COMPLEMENTI DI MATEMATICA 25 GIUGNO 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

1. Sia data la successione di funzioni su $[0, +\infty[$: $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 2nx^2 + 4n^2}$. Si indichino:

   (a) la norma uniforme di ogni f_n (0,5p.): $1/6n$;

   (b) l'insieme A delle $x \geq 0$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (0,5p.): $[0, +\infty[$;

   (c) Si dica per quali x di A la somma $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è continua in x (motivando - 2,5p.):

   Fissato $M > 0$ si ha $\sqrt{2n} > M$ per n grande. Allora $\|f_n\|_{\infty,[0,M]} = f_n(M) \simeq \frac{M}{n^2}$ per n grande.
   Ne segue che $\sum_n \|f_n\|_{\infty,[0,M]} < +\infty \Rightarrow$ la serie conv. tot. ($\Rightarrow$ unif.) su $[0,M]$ e quindi $S(x)$ è continua su $[0,M]$ $\forall M \Rightarrow S(x)$ è continua su $\mathbb{R}$;

   (d) (*) Si dica se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$ (motivando - 2,5p.):

   Se conv. unif su $\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} S(x) = \sum_n \lim f_n(x) = 0$
   Ma se $m \in \mathbb{N}$, si ha $S(\sqrt{m}) = \sum_n \frac{m}{4n^2 + 2nm + m^2} \geq$
   $\sum_{n=1}^{m} \frac{m}{4n^2 + 2nm + m^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{7m^2} = \frac{1}{7}$
   e quindi $\lim_{x \to +\infty} S(x) \geq \frac{1}{7} \neq 0$;

   (e) Si dica se le f_n sono in $L^1([0, +\infty[)$: ~~sì~~ | no ; in caso affermativo dire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge in $L^1([0, +\infty[)$: sì | ~~no~~ (1p.);

(f) Si dica se le f_n sono in $L^2([0,1])$ e in caso affermativo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente rispetto alla norma di $L^2([0,1])$ (motivando - 1,5p.):

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 \frac{x^4}{(4n^2+2nx^2+x^4)^2} = \frac{n^2}{n^4}\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{y^4}{(4+2y^2+y^4)^2}\sqrt{n}\,dy$$

$$\|f_n\|_2 = \frac{1}{n^{3/4}}\left(\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{y^4}{(4+2y^2+y^4)^2}dy\right)^{1/2} \simeq \frac{1}{n^{3/4}}\left(\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{y^4}{4}dy\right)^{1/2} = \frac{1}{n^{3/4}}\frac{1}{4\sqrt{5}}\frac{1}{n^{5/4}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{1}{n^2}$$. Poto che $2>1$ $\sum_n \|f_n\|_2 < +\infty \Rightarrow \sum_n f_n$ conv. L^2

2. Si consideri la funzione definita da $f(t) := (\pi^2 - 4t^2)$ per $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ ed estesa su $\mathbb{R}$ in modo da essere π-periodica (si consiglia di tracciare il grafico di f per farsene un'idea).

(a) Si indichino i parametri dello sviluppo di f in serie di Fourier (0,5+0,5+1,5+1,5 p.):

$\tilde{\omega} = \boxed{2}$, $a_0 = \boxed{\frac{2}{3}\pi^2}$ $a_n = \boxed{-4\frac{(-1)^n}{n^2}}$, $b_n = \boxed{0}$;

(b) si dica se la serie detta sopra converge uniformemente a f (motivando - 2p.):

conv. perché $|a_n| \simeq \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$

;

(c) si usi quanto trovato sopra per trovare (2p.) la somma della serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$:

Dalla eguaglianza di Parseval:

$$\pi a_0^2 + \frac{\pi}{2}\sum_1^{\infty} a_n^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^2(t)\,dt = \frac{8}{15}\pi^5.$$ Dunque:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\pi^2-4t^2)^2 dt - \frac{8}{9}\pi^4 = \left(\frac{16}{15} - \frac{8}{9}\right)\pi^4 = \frac{\pi^4}{9}$$

3. Si riporti l'espressione della soluzione (se esiste - 4p.) del problema:

$$y'' + 5y' + 6y = H(t)\sin(3t) \qquad \text{con la condizione } y(t) = 0 \text{ per } t < 0,$$

dove $H(t) = 1$ per $t > 0$ e $H(t) = 0$ per $t < 0$:

$$y(t) = H(t) \left\{ \frac{3e^{-2t}}{13} - \frac{e^{-3t}}{6} - \frac{5}{78}\cos(3t) - \frac{1}{78}\sin(3t) \right\}.$$

4. Si trovino (4p.) tutte le distribuzioni temperate y che risolvono l'equazione:

$$y'' + 4y = \delta'$$

$$y(t) = \frac{\mathrm{sgn}(t)}{2}\cos(2t) + d_1 \sin(2t) + d_2 \cos(2t).$$

$$d_1, d_2 \in \mathbb{R}$$

5. Si calcoli l'integrale (È RICHIESTO lo svolgimento nelle facciate bianche - 5p.).

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos(x)}{(1+x^2)(4+x^2)}\, dx$$

6. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + 5y' + 6y = f(t)$$

Se $f(t) = e^{-3|t|}$, si trovi (se esiste) la soluzione $y(t)$ dell'equazione del punto precedente con la condizione

$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} y'(t) = 0.$$

(È RICHIESTO lo svolgimento nelle facciate bianche - 8 p.).

TEMPO DISPONIBILE: DUE ORE E TRENTA MINUTI.

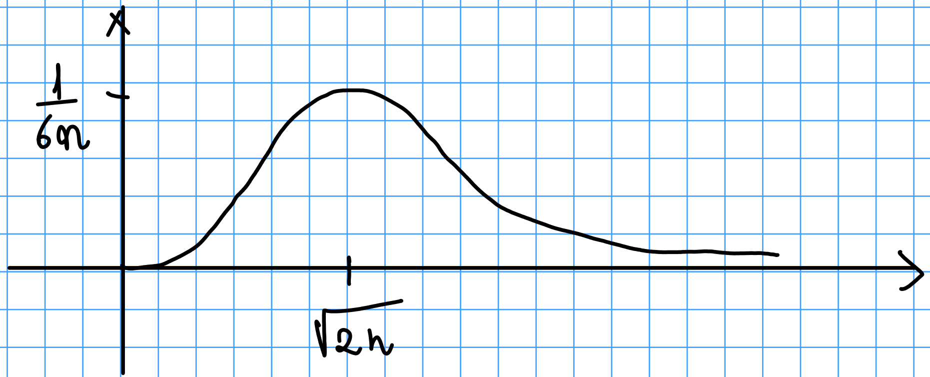
$$f_n(x) = \frac{x^2}{4n^2+2nx^2+x^4} \qquad . \qquad f_n(0) = f_n(\infty) = 0 \; ;$$

$$f_n'(x) = \frac{2x(4n^2+2nx^2+x^4) - x^2(4nx+4x^3)}{(4n^2+2nx^2+x^4)^2} =$$

$$\frac{8n^2x + \cancel{4nx^3} + 2x^5 - \cancel{4nx^3} - 4x^5}{(\qquad)^2} = \frac{8n^2x - 2x^5}{(\qquad)^2}$$

$$f_n'(x) = 0 \iff x = x_n := \begin{cases} 0 \\ \sqrt{2n} \end{cases} \qquad (x_n^4 = 4n^2)$$

$$f_n(x_n) = \frac{2n}{4n^2+4n^2+4n^2} = \frac{1}{6n}$$



$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{6n}$$

(b) dato che $f_n(x) \simeq \dfrac{x^2}{n^2} \Rightarrow A = [0,+\infty[$

(e) $\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{4n^2+2nx^2+x^4}\,dx \quad (x=\sqrt{n}y,\ dx=\sqrt{n}\,dy) = \int_0^{+\infty} \frac{n\,y^2}{n^2(4+2y^2+y^4)}\sqrt{n}\,dy =$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{4+2y^2+y^4} \Rightarrow \sum_n \|f_n\|_1 = +\infty \ \ldots$$

(f) Su $[0,1]$ $\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 \frac{x^4}{(4n^2+2nx^2+x^4)^2} = \frac{n^2}{n^4}\int_0^{1/\sqrt{n}}\frac{y^4}{(4+2y^2+y^4)^2}\sqrt{n}\,dy$

$$\Rightarrow \|f_n\|_2 = \frac{1}{n^{3/4}}\left(\int_0^{1/\sqrt{n}}\frac{y^4}{(4+2y^2+y^4)^2}dy\right)^{1/2} \simeq \frac{1}{n^{3/4}}\left(\int_0^{1/\sqrt{n}}\frac{y^4}{4}dy\right)^{1/2} = \frac{1}{n^{3/4}}\frac{1}{4\sqrt{5}}\frac{1}{n^{5/4}}$$

$= \frac{1}{4\sqrt{5}}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_n \|f_n\|_2 < +\infty$ e quindi la serie conv. in L^2

$y'' + 5y' + 6y = H(t)\sin(3t)$ $\quad y(t)=0$ se $t<0$. Uso Laplace

$(z^2+5z+6)\hat{y} = \frac{3}{z^2+9} \iff \hat{y}(z) = \frac{3}{(z+2)(z+3)(z^2+9)}$

Posto $g(z) := \frac{3e^{zt}}{(z^2+5z+6)(z^2+9)}$ $\quad$ poli $-2; -3, \pm 3i$

$$\mathrm{Res}(g,-2) = \frac{3\,e^{zt}}{(2z+5)(z^2+9)+(z^2+5z+6)2z}\Big|_{z=-2} = \frac{3e^{-2t}}{(-4+5)(4+9)} = \frac{3e^{-2t}}{13}$$

$$\mathrm{Res}(g,-3) = \frac{3\,e^{zt}}{(2z+5)(z^2+9)+(z^2+5z+6)2z}\Big|_{z=-3} = \frac{3e^{-3t}}{(-6+5)(9+9)} = \frac{-e^{-3t}}{6}$$

$$\mathrm{Res}(g,3i) = \frac{3\,e^{zt}}{(2z+5)(z^2+9)+(z^2+5z+6)2z}\Big|_{z=3i} = \frac{3e^{3it}}{(-9+15i+6)\,6i} = \frac{e^{3it}}{6(-5-i)} = \frac{(-5+i)e^{3it}}{6\cdot 26}$$

$$\Rightarrow y(t) = H(t)\left\{\frac{3e^{-2t}}{13} - \frac{e^{-3t}}{6} + \frac{2}{6\cdot 13}\,\mathrm{Re}\left((-5+i)e^{3it}\right)\right\} =$$

$$H(t)\left\{\frac{3e^{-2t}}{13} - \frac{e^{-3t}}{6} - \frac{5}{78}\cos(3t) - \frac{1}{78}\sin(3t)\right\}$$

$y'' + 4y = \delta'$ applico Fourier

$$(-\omega^2+4)\,\hat{y}(\omega) = i\omega \iff \hat{y}(\omega) = \mathrm{v.p.}\frac{i\omega}{4-\omega^2} + c_1\delta_2 + c_2\delta_{-2}$$

$$= -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{\omega-2} + \frac{1}{\omega+2}\right) + c_1\delta_2 + c_2\delta_{-2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi\, y(-t) = -\frac{i}{2}\, \mathcal{F}\left(\frac{1}{\omega-2} + \frac{1}{\omega+2}\right) + c_1' e^{2it} + c_2' e^{-2it} =$$

$$-\frac{i}{2}\left(-i\pi\, \mathrm{sgn}(t)\right)\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$y(t) = -\frac{1}{4}\, \mathrm{sgn}(-t)\left(e^{-2it} + e^{2it}\right) + d_1 \sin(2t) + d_2 \cos(2t)$$

$$= \frac{\mathrm{sgn}(t)}{2} \cos(2t) + d_1 \sin(2t) + d_2 \cos(2t)$$

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-3|t|}$$

$$(-\omega^2 + 5\omega i + 6)\, \hat{y}(\omega) = \frac{6}{\omega^2+9} \quad . \quad \hat{y}(\omega) = \frac{-6}{(\omega^2+9)(\omega^2 - 5i\omega - 6)}$$

poli $\quad i\omega = -2 / -3 \quad \omega = 2i / 3i \quad$ e $\quad \pm 3i \Rightarrow 3i$ DOPPIO

$$g(z) := \frac{-6\, e^{izt}}{(z^2+9)(z^2 - 5iz - 6)}$$

$$\mathrm{Res}(g, 2i) = \left.\frac{-6e^{izt}}{2z(z^2 - 5iz - 6) + (z^2+9)(2z - 5i)}\right|_{z=2i} =$$

$$\frac{-6e^{-2t}}{(-4+9)(4i-5i)} = \boxed{-\frac{6i}{5}e^{-2t}}$$

$$\mathrm{Res}(g,-3i) = \frac{-6e^{izt}}{2z(z^2-5iz-6)+(z^2+9)(2z-5i)}\Bigg|_{z=-3i} =$$

$$\frac{-6e^{3t}}{-6i(-9-15-6)} = \boxed{\frac{ie^{3t}}{30}}$$

$$\mathrm{Res}(g,3i) = -6\frac{d}{dz}\frac{e^{izt}}{(z+3i)(z-2i)}\Bigg|_{z=3i} =$$

$$-6\,\frac{ite^{itz}(z+3i)(z-2i)-e^{itz}(z-2i+z+3i)}{(z+3i)^2(z-2i)^2}\Bigg|_{z=3i} =$$

$$-6\,\frac{ite^{-3t}(6i)(i)-e^{-3t}(3i-2i+3i+3i)}{-36\cdot(-1)} = \boxed{ite^{-3t}+\frac{7}{6}ie^{-3t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \begin{cases} \frac{6}{5}e^{-2t}-te^{-3t}-\frac{7}{6}e^{-3t} & \text{se } t>0 \\ \frac{e^{3t}}{30} & \text{se } t<0 \end{cases}}$$