

Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti negli appositi spazi del foglio risposte, aggiungendo una breve motivazione quando richiesta.

1. Sia data la successione di funzioni definite su $[0, +\infty[$ da $f_n(x) = \frac{x}{n^2x^3 + 8}$.
 - (a) Calcolare la norma uniforme di ogni f_n (2 punti);
 - (b) individuare l'insieme A delle $x \geq 0$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (1 punto);
 - (c) dire per quali x di A la somma della serie $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è continua in x (motivando - 3 punti);
 - (d) (*) dire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$ (motivando - 4 punti);
 - (e) dire se le f_n sono in $L^1([0, +\infty[)$ e in caso affermativo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge in $L^1([0, +\infty[)$ (2 punti);
 - (f) dire se le f_n sono in $L^2([0, +\infty[)$ e in caso affermativo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente rispetto alla norma di $L^2([0, +\infty[)$ (motivando - 4 punti).
2. Si calcoli l'integrale (È RICHIESTO il procedimento - 8 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{4 + x^4} dx$$

3. Si consideri la funzione definita da $f(t) := |4t - \pi|$ per $-\pi \leq t \leq \pi$ ed estesa su \mathbb{R} in modo da essere 2π -periodica (si consiglia di tracciare il grafico di f per farsene un'idea).
 - (a) Si scrivano sul foglio risposte i parametri dello sviluppo di f in serie di Fourier (1+1+2+2 punti);
 - (b) si dica se la serie detta sopra converge uniformemente a f (motivando - 3 punti);
 - (c) si usi quanto trovato sopra per dire (3 punti) se l'equazione differenziale:

$$\begin{cases} y'' + 64y = f(t) & \text{per } t \in] - 0, \pi[\\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

ha soluzione e se la soluzione è unica.

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = f$$

(a) Sia $f(t) = e^{-2|t|}$; si trovi (se esiste) la soluzione $y(t)$ con la condizione

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y'(t) = 0.$$

(È RICHIESTO il procedimento - 12 p.)

(b) Sia ora $f(t) = H(t) \sin(2t)$ dove $H(t) = 1$ per $t > 0$ e $H(t) = 0$ per $t < 0$; si trovi (6 punti) la soluzione $y(t)$ con la condizione:

$$y(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

(c) Per $f = \sin(t)$, si trovino tutte le soluzioni y dell'equazione (eventualmente nessuna) tali che $y \in \mathcal{S}'$ (distribuzioni temperate) (6 punti).

5. (a) Si descrivano le distribuzioni u che risolvono l'equazione: (4 p.)

$$(9 - t^2)u = 1;$$

(b) (*) si descrivano le distribuzioni u che risolvono l'equazione: (4 p.)

$$(t - 2)^2 u = \delta;$$

(c) se $u(t) = (H(t) - H(t - 1))t$ si calcoli $u'' + u'$ (4 p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

--

voto

Cognome:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(1a) $\|f_n\|_\infty = \frac{\sqrt[3]{4}}{12} n^{-\frac{2}{3}}$; (1b) $A = [0, +\infty[$; 2 1

(1c) s è continua per $x > 0$, infatti:

Fissato $\varepsilon > 0$ si ha, per n abbastanza grande, che
 $\max_{x \geq \varepsilon} |f_n(x)| = f_n(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dunque
 $\sum_n \|f_n\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} < +\infty \Rightarrow \sum_n f_n$ CONV. UNIF.
 SU $[\varepsilon, +\infty[\Rightarrow S$ è continua su $[\varepsilon, +\infty[$.
 Allora S è continua su $]0, +\infty[$.
 NON È CONTINUA IN $x=0$ PER IL PUNTO (d)

3

(1d) (*) s converge uniformemente su \mathbb{R} sì no, infatti:

Se $m \in \mathbb{N}$ si ha $S\left(\frac{1}{m^{2/3}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{-2/3}}{(n^2 m^{-2} + 8)}$
 $\geq \sum_{n=1}^m \frac{1}{m^{2/3}} \frac{1}{n^2/m^2 + 8} \geq \frac{1}{m^{2/3}} \sum_{n=1}^m \frac{1}{9} = \frac{m}{m^{2/3}}$
 $= m^{1/3}$. DUNQUE $S(m^{-2/3}) \rightarrow +\infty$ se $m \rightarrow \infty$.
 NE SEGUE CHE NON PUÒ ESSERE $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = S(0) = 0$
 (S NON È CONTINUA IN $x=0$).
 IN PARTICOLARE $\sum_n f_n$ NON PUÒ CONVERGERE UNIFORM.
 SU $]0, +\infty[$

4

(1e) le $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ sì no; la serie $\sum_n f_n$ converge in $L^1(\mathbb{R})$ sì no;

2

(1f) le $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ no ; la serie $\sum_n f_n$ converge in $L^2(\mathbb{R})$ sì no , infatti:

$$\int_0^{+\infty} f_m^2(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(m^2 x^3 + 8)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{y^2 m^{-4/3}}{(y^3 + 8)^2} m^{-2/3} dy$$

$$= \frac{1}{m^2} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(y^3 + 8)^2} dy \quad (\text{HO USATO LA SOSTITUZIONE } x = \frac{y}{m^{2/3}})$$

$$\Rightarrow \|f_m\|_2 = \frac{\cos t}{m} \Rightarrow \sum_m \|f_m\|_2 = +\infty$$

4

(2) integrale = $\frac{\pi \sin(1)}{4e}$ (CALCOLI NELLE FACCIATE BIANCHE);

8

(3a) $\tilde{\omega} = 1$, $a_0 = \frac{5\pi}{4}$

$$a_n = \frac{8 - 16\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 8\cos(n\pi)}{\pi n^2}$$

$$b_n = 0$$

6

(3b) la serie converge uniformemente sì no ; infatti

i coefficienti tendono a zero con ordine $\frac{1}{m} \Rightarrow \sum_n |a_n| < +\infty$

\Rightarrow la serie conv. uniformemente

3

(3c) l'equazione ha soluzione sì no ; se sì la soluzione è unica sì no .

3

--

voto

Cognome:																			
Nome:																			
Matricola:																			

(4a) La soluzione $y(t)$ è data da: (CALCOLI NELLA FACCIATA BIANCA)

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{-2t}}{9} & \text{se } t \geq 0 \\ e^{2t} - \frac{(12t + 8)}{9} e^t & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

(4b) La soluzione $y(t)$ è data da:

$$y(t) = H(t) \frac{(10t - 4)e^t + 4\cos(2t) - 3\sin(2t)}{25}$$

(4c) La soluzione $y(t)$ è data da:

$$y(t) = \frac{1}{2} \cos(t)$$

(5a) Le soluzioni u sono date da:

$$u(t) = \frac{1}{6} \text{v.p.} \left(\frac{1}{3-t} \right) + \frac{1}{6} \text{v.p.} \left(\frac{1}{t+3} \right) + \\ + \alpha \delta(t-3) + \beta \delta(t+3) \quad \text{per } \alpha, \beta \text{ arbitrarie}$$

(5b) (*) Le soluzioni u , sono date da:

$$u(t) = \frac{\delta(t)}{4} + \alpha \delta(t-2) + \beta \delta'(t-2) \\ \alpha, \beta \text{ costanti arbitrarie}$$

(5c) $u'' + u'$ vale:

$$u(t) = H(t) - H(t-1) + \delta(t) - 2\delta(t-1) - \delta'(t-1)$$

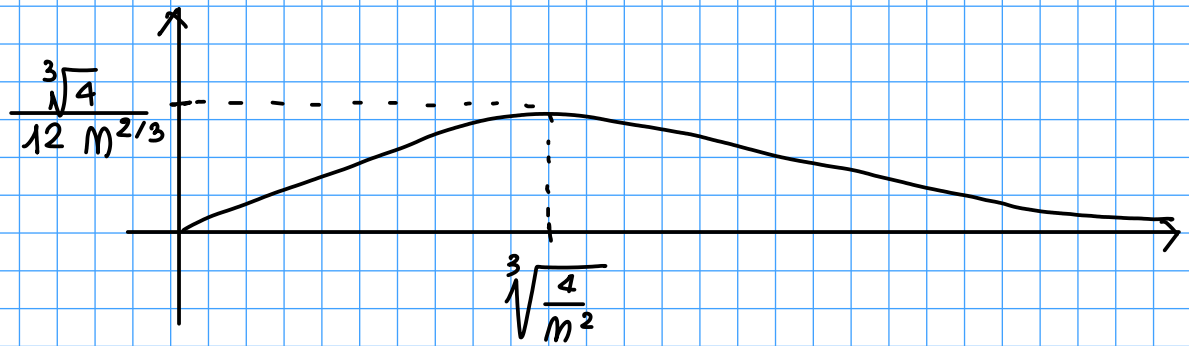
SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO (4a)

(1) $f_m(x) = \frac{x}{m^2 x^3 + 8}$ Facciamo il grafico di f_m : finto m si ha

$$f_m(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 0, \quad f_m'(x) = \frac{8 - 2m^2 x^3}{(m^2 x^3 + 8)^2}$$

$$f_m'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[3]{4/m^2}$$

$$f_m(\sqrt[3]{4/m^2}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{12} \frac{1}{\sqrt[3]{m^2}}$$



DUNQUE

$$(a) \quad \|f_m\|_{\infty} = \frac{\sqrt[3]{4}}{12} m^{-2/3}$$

(b) $A = [0, +\infty[$ dato che, finto $x \geq 0$ $f_m(x) \approx \frac{1}{x^2 m^2}$ se $x \neq 0$
mentre per $x=0$ $f_m(x) = 0 \quad \forall m$.

(c) Dato che $\frac{2}{3} < 1$ la serie $\sum_m \|f_m\|_{\infty}$ non converge e non possiamo

trovare la conv. unif. su $[0, +\infty[$ (vedi anche il successivo punto d)
Però finto $\varepsilon > 0$ si ha, per m abbastanza grande.

$$\|f_m\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} = \max_{x \geq \varepsilon} |f_m(x)| = f_m(\varepsilon) \approx \frac{1}{m^2 \varepsilon^2}.$$

Dunque $\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_m \|f_m\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} < \infty \Rightarrow$ la serie converge uniformemente su $[\varepsilon, +\infty[\Rightarrow$ la somma S è continua su $[\varepsilon, +\infty[$. Ne segue che S è continua in ogni $x > 0$. Per quanto riguarda $x=0$ vedi punto d).

(d) S non è continua in $x=0$. Infatti se m è intero

$$S\left(\frac{1}{m}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{1}{m^{2/3}}\right) \geq \sum_{n=1}^m \frac{m^{-2/3}}{m^2/m^2 + 8} \geq \frac{1}{m^{2/3}} \sum_{n=1}^m \frac{1}{9} = \frac{\sqrt[3]{m}}{9}$$

per cui non può essere $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = S(0) = 0$.

In particolare la serie non può convergere uniformemente su $[0, +\infty[$

(e) A m fissato $f_m(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ per cui $f_m \in L^1$. Si ha:

$$\|f_m\|_1 = \int_0^{+\infty} |f_m(x)| dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{m^2 x^3 + 8} dx = \left(x = y m^{-2/3} \quad dx = dy m^{-2/3} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{y m^{-2/3}}{y^3 + 8} m^{-2/3} dy = \frac{1}{m^{4/3}} \int_0^{+\infty} \frac{y}{y^3 + 8} dy \Rightarrow \sum_m \|f_m\|_1 < +\infty$$

(f) Analogamente $f^2 \in L^1$ e

$$\int_0^{+\infty} f_m^2(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(m^2 x^3 + 8)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(m^{-2/3} y)^2}{(y^3 + 8)^2} m^{-2/3} dy = \frac{1}{m^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(y^3 + 8)^2} dy}_{C^2}$$

$$\Rightarrow \|f_m\|_2 = \frac{C}{m} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_2 = +\infty$$

(2) Calcoliamo $I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{4+x^4} dx$. Se $g(z) = \frac{z e^{iz}}{4+z^2}$, allora g ha 4

due poli semplici: $\pm 1+i$

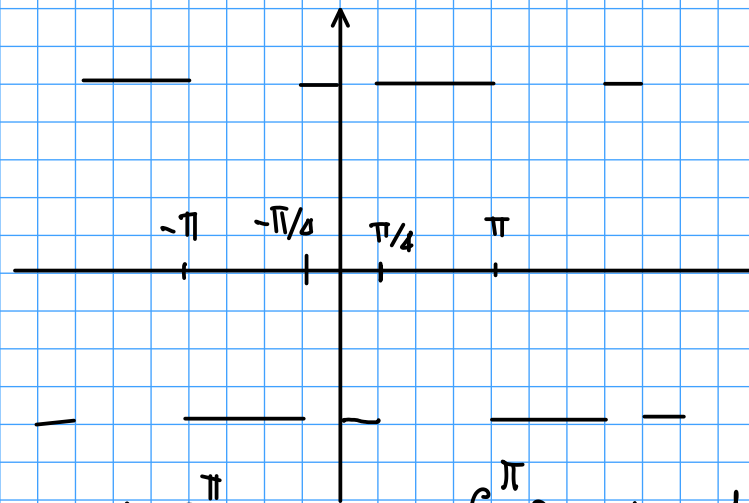
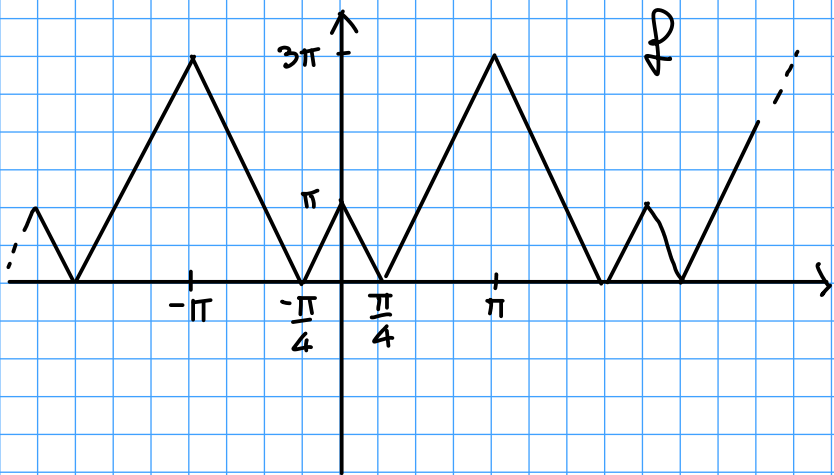
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 2\pi i \left(\text{Res}(g, 1+i) + \text{Res}(g, -1+i) \right) = 2\pi i \left(\left[\frac{z e^{iz}}{4z^3} \right]_{z=1+i} + \left[\frac{z e^{iz}}{4z^3} \right]_{z=-1+i} \right)$$

$$= \frac{\pi i}{2} \left(\frac{e^{i-1}}{(1+i)^2} + \frac{e^{-i-1}}{(-1+i)^2} \right) = \frac{\pi i}{2} e^{-1} \left(\frac{e^i}{2i} + \frac{e^{-i}}{-2i} \right) = \frac{\pi i}{2} \frac{\sin(1)}{e}$$

Allora $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{4+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{4+x^4} dx = \frac{1}{2} \Im \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{4+x^4} dx \right) =$

$$= \frac{1}{2} \Im(I) = \frac{\pi}{4} \frac{\sin(1)}{e}$$

(3) Notiamo che f è pari ($\Rightarrow b_n = 0 \forall n$) e che lo derivato (che si può intendere in senso L^1/L^2) vale -4 se $0 < t < \pi/4$, vale 4 se $\frac{\pi}{4} < t < \pi$



Dunque $\omega = 1$ ($T = 2\pi!$), $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \cdot \pi + \frac{1}{2} \frac{3\pi}{4} \cdot 3\pi \right) =$

$\frac{1}{8} \pi + \frac{9}{8} \pi = \frac{10}{8} \pi$. Inoltre

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(mt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{f(t) \sin(mt)}{m} \right]_0^{\pi} +$$

$$- \frac{2}{\pi m} \int_0^{\pi} f'(t) \sin(mt) dt = \frac{2}{m\pi} \int_0^{\pi/4} 4 \sin(mt) dt - \frac{2}{m\pi} \int_0^{\pi/4} 4 \sin(mt) dt =$$

$$\frac{8}{m\pi} \left[-\frac{\cos(mt)}{m} \right]_0^{\pi/4} - \frac{8}{m\pi} \left[-\frac{\cos(mt)}{m} \right]_{\pi/4}^{\pi} = \frac{8}{m^2\pi} \left(1 - 2\cos(m\pi/4) + \cos(m\pi) \right)$$

Dato che $|a_m| \approx \frac{1}{m^2}$ la serie di Fourier converge uniformemente.

Per risolvere il problema su $]0, \pi[$ con dato $y' = 0$ su $0, \pi$

cerco $y(t)$ come serie di Fourier in soli coseni:

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m \cos(mt)$$

Come noto lo sviluppo di f in coseni coincide con quello dato sopra (dato che f è pari). Quindi l'eq. implica

$$(*) \quad y_m (-m^2 + 64) = a_m$$

che individua y_m per gli $m \neq 8$. Se $m = 8$ abbiamo

$$a_8 = \frac{8}{8^2 \pi} (1 - 2 \cos(2\pi) + \cos(4\pi)) = 0. \quad \text{Dunque (*) è risolvibile anche}$$

per $m = 8$, essendo y_8 un numero reale ARBITRARIO (\Rightarrow NO UNICITÀ)

(4) (a) Usiamo la Trasformata di Fourier. Se $f(t) = e^{-2|t|}$ allora

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{2t} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-2t} e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{(2-i\omega)t}}{2-i\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-(2+i\omega)t}}{-(2+i\omega)} \right]_0^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{2-i\omega} + \frac{1}{2+i\omega} = \frac{4}{4+\omega^2} \quad \text{Applichiamo } \mathcal{F} \text{ all'equazione:}$$

$$(-\omega^2 - 2i\omega + 1) \hat{y}(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{4}{(i\omega-1)^2(4+\omega^2)} \Leftrightarrow$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{-4}{(\omega+i)^2(\omega^2+4)} \quad \left(2 \text{ poli semplici } z = \pm i ; 1 \text{ polo doppio } z = -i \right)$$

$$\text{Sia } g(z) = \frac{-4 e^{izt}}{(z+i)^2(z^2+4)} \quad \text{Allora}$$

$$\text{Res}(g, -i) = \frac{d}{dz} \frac{-4 e^{izt}}{z^2+4} \Big|_{z=-i} = \frac{-4it e^{izt} (z^2+4) + 4 e^{izt} \cdot 2z}{(z^2+4)^2} \Big|_{z=-i}$$

$$= \frac{-12it e^t - 8i e^t}{9} = -\frac{4}{9} e^t (3t+2)$$

$$\text{Res}(g, 2i) = \frac{-4 e^{izt}}{(z+i)^2(z+2i)} \Big|_{z=2i} = \frac{-4 e^{-2t}}{(-9)(4i)} = -\frac{1}{9} i e^{-2t}$$

$$\text{Res}(g, -2i) = \frac{-4 e^{izt}}{(z+i)^2(z-2i)} \Big|_{z=-2i} = \frac{-4 e^{2t}}{-1(-4i)} = i e^{2t}$$

Dunque, usando le formule di inversione di \mathcal{F} :

$$y(t) = \begin{cases} i \operatorname{Res}(g, 2i) = \frac{e^{-2t}}{9} & \text{se } t > 0 \\ (-i) (\operatorname{Res}(g, -i) + \operatorname{Res}(g, -2i)) = -\frac{4}{9} (3t+2) e^t + e^{2t} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

(b) Usiamo Laplace. Se $f(t) = H(t) \sin(2t) \Rightarrow \check{f}(z) = \frac{2}{z^2 + 4}$.

Trasformando l'equazione:

$$(z^2 - 2z + 1) \check{y}(z) = \frac{2}{z^2 + 4} \Leftrightarrow \check{y}(z) = \frac{2}{(z-1)^2 (z^2 + 4)}$$

Posto $g(z) = \frac{2e^{zt}}{(z-1)^2 (z^2 + 4)}$ (poli $\pm 2i$ semplici e $z=1$ doppio) si ha

$$\operatorname{Res}(g, 1) = \left. \frac{d}{dz} \frac{2e^{zt}}{z^2 + 4} \right|_{z=1} = \left. \frac{2t e^{zt} (z^2 + 4) - 2e^{zt} \cdot 2z}{(z^2 + 4)^2} \right|_{z=1} =$$

$$\frac{2t e^t \cdot 5 - 2e^t \cdot 2}{25} = \frac{(10t - 4)e^t}{25}$$

$$\operatorname{Res}(g, 2i) = \left. \frac{2e^{zt}}{(z-1)^2 (z+2i)} \right|_{z=2i} = \frac{2e^{2it}}{(-3-4i)(4i)} = \frac{e^{2it}}{2} \frac{1}{4-3i} = \frac{4+3i}{50} e^{2it}$$

$\operatorname{Res}(g, -2i) = \overline{\operatorname{Res}(g, 2i)}$. Dunque se $t > 0$

$$y(t) = \sum \operatorname{Residui} = \frac{(10t-4)e^t}{25} + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{4+3i}{50} e^{2it} \right) = \frac{(10t-4)e^t + 4\cos(2t) - 3\sin(2t)}{25}$$

16c) Usiamo Fourier nelle distribuzioni temperate. Se $u(t) = \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega) = \frac{2\pi}{2i} (\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)) \quad \text{Trasformando l'equazione}$$

$$(i\omega - 1)^2 \hat{y}(\omega) = \frac{2\pi}{2i} (\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)) \Leftrightarrow \text{(DATO CHE } (i\omega-1)^2 = 0 \text{ NON HA RADICI REALI)}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{2\pi}{2i} \left[\frac{1}{(i\omega-1)^2} \right]_{\omega=1} \delta(\omega-1) - \frac{2\pi}{2i} \left[\frac{1}{(i\omega-1)^2} \right]_{\omega=-1} \delta(\omega+1) =$$

$$\frac{2\pi}{2i} \frac{1}{(i-1)^2} \delta(\omega-1) - \frac{2\pi}{2i} \frac{1}{(-i-1)^2} \delta(\omega+1) = \frac{2\pi}{2i} \frac{1}{(-2i)} \delta(\omega-1) - \frac{1}{2i} \frac{1}{2i} \delta(\omega+1)$$

$$= -\frac{2\pi}{4} (\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)) \quad \text{ANTI TRASFORMANDO}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cos(t)$$

(5) (a) $(9-t^2)u = 1$. Una soluzione è data da $\bar{u} = \frac{1}{9-t^2}$ che

è intero come $\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3-t} + \frac{1}{3+t} \right)$ o più precisamente come $\frac{1}{2} \text{v.p.} \left(\frac{1}{3-t} \right) + \frac{1}{2} \text{v.p.} \left(\frac{1}{3+t} \right)$.

A \bar{u} vanno aggiunte tutte le soluzioni di $(9-t^2)u = 0 \Leftrightarrow (3-t)(3+t)u = 0$

che sono $\alpha \delta(t-3) + \beta \delta(t+3)$

(b) $(t-2)^2 u = \delta$ una soluzione è $\bar{u} = \frac{1}{(t-2)^2} \delta = \frac{1}{4} \delta$

(anche se $\frac{1}{(t-2)^2}$ non è C^∞ , e quindi il prodotto per δ non sarebbe definito, e' du ora che $\frac{1}{4} \delta$ è ben definito e che $(t-2)^2 \frac{\delta}{4} = 4 \frac{\delta}{4} = \delta$)

A \bar{u} bisogna aggiungere tutte le soluzioni di $(t-2)^2 = 0$ e cioè $\alpha \delta(t-2) + \beta \delta'(t-2)$

(c) $u = (H(t) - H(t-1))t = p(t)t$ dove $p(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$
 $\Rightarrow p'(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$

Ne segue che $u' = p(t) + p'(t)t = p(t) + \delta(t) \cdot t - \delta(t-1)t = p(t) - \delta(t-1)$

$u''(t) = \delta(t) - \delta(t-1) - \delta'(t-1)$ e in fine

$u'' + u' = \delta(t) - 2\delta(t-1) - \delta'(t-1) + p(t)$