

Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti negli appositi spazi del foglio risposte, aggiungendo una breve motivazione quando richiesta.

1. Sia data la successione di funzioni definite su  $\mathbb{R}$  da  $f_n(x) = \frac{3n - 4x^2}{\sqrt{n}(n^2 + x^4)}$ .
  - (a) Calcolare la norma uniforme di ogni  $f_n$  (2 punti);
  - (b) individuare l'insieme  $A$  delle  $x$  in  $\mathbb{R}$  per cui  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge (1 punto);
  - (c) dire per quali  $x$  di  $A$  la somma della serie  $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  è continua in  $x$  (motivando - 3 punti);
  - (d) (\*) dire quanto fa (se esiste)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x)$  (motivando - 4 punti);
  - (e) dire se le  $f_n$  sono in  $L^1(\mathbb{R})$  e in caso affermativo se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge in  $L^1(\mathbb{R})$  (3 punti);
  - (f) dire se le  $f_n$  sono in  $L^2(\mathbb{R})$  e in caso affermativo se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge in  $L^2(\mathbb{R})$  (motivando - 4 punti).
2. Si calcoli l'integrale (È RICHIESTO il procedimento - 8 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{4 + x^4} dx$$

3. Si consideri la funzione  $f(t) := |\cos(t)|$  (che è periodica di periodo  $T = \pi$ ).
  - (a) Si scrivano sul foglio risposte i parametri dello sviluppo di  $f$  in serie di Fourier nelle funzioni  $\pi$ -periodiche.; (1+1+2+2 punti);
  - (b) si dica se la serie detta sopra converge uniformemente a  $f$  (motivando - 3 punti);
  - (c) si usi quanto trovato sopra per dire (3 punti) se l'equazione differenziale:

$$\begin{cases} y'' + 9y = f(t) & \text{per } t \in \mathbb{R} \\ y(t) \text{ } \pi\text{-periodica.} \end{cases}$$

ha soluzione e se la soluzione è unica.

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - y = f$$

(a) Sia  $f(t) = e^{-2|t|}$ ; si trovi (se esiste) la soluzione  $y(t)$  con la condizione

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y'(t) = 0.$$

(È RICHIESTO il procedimento - 12 p.)

(b) Sia ora  $f(t) = H(t) \sin(2t)$  dove  $H(t) = 1$  per  $t > 0$  e  $H(t) = 0$  per  $t < 0$ ; si trovi (6 punti) la soluzione  $y(t)$  con la condizione:

$$y(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

(c) Per  $f = \sin(t)$ , si trovino tutte le soluzioni  $y$  dell'equazione (eventualmente nessuna) tali che  $y \in \mathcal{S}'$  (distribuzioni temperate) (6 punti).

5. (a) Si trovino le soluzioni dei due seguenti problemi di Cauchy (4 punti):

$$\begin{cases} y_1'' = 1 \\ y_1(0) = A, y_1'(0) = B \end{cases}, \quad \begin{cases} y_2'' - y_2' = 1 \\ y_2(0) = C, y_2'(0) = D \end{cases}$$

(al variare di  $A, B, C$  e  $D$  reali).

(b) Usando il punto precedente si trovino (4 punti) tutte le funzioni continue che verificano

$$\{y'' - (H(t)y)'\} = 1 \quad \text{nel senso delle distribuzioni}$$

(in termini di opportune costanti arbitrarie - quante?)

(c) Tra le funzioni del punto precedente si individui, se ne esistono, quelle che sono anche derivabili su tutto  $\mathbb{R}$ . Quale proprietà in più devono avere queste soluzioni?

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

--

voto

Cognome: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matricola: 

--	--	--	--	--	--

(1a)  $\|f_n\|_\infty =$ 

$\frac{3}{n\sqrt{n}}$
-----------------------

 ; (1b)  $A =$ 

$\mathbb{R}$
--------------

 ; 

--	--

(1c)  $s$  è continua per  $x \in \mathbb{R}$ , infatti:

Si ha  $\sum_n \|f_n\|_\infty < +\infty$  (qui  $\|f_n\|_\infty = \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$ )  
 e quindi la serie converge uniformemente  
in  $\mathbb{R}$ . Ne segue che  $S$  è continua  
 in ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

(1d) (\*) Il limite della serie per  $x \rightarrow +\infty$ :

Per la convergenza uniforme su  $\mathbb{R}$  (vedi sopra)  
 si ha  

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_n f_n(x) =$$

$$\sum_n \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_n 0 = 0$$

(1e) le  $f_n \in L^1(\mathbb{R})$   sì  no ; la serie  $\sum_n f_n$  converge in  $L^1(\mathbb{R})$   sì  no ;

(1f) le  $f_n \in L^2(\mathbb{R})$   si  no ; la serie  $\sum_n f_n$  converge in  $L^2(\mathbb{R})$   si  no , infatti:

$$\|f_m\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{m} \left( \frac{3m - 4x^2}{m^2 + x^4} \right)^2 dx = \left( x = \sqrt{m} y \right)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{m} \left( \frac{3m - 4y^2}{m^2 + m^2 x^4} \right)^2 \sqrt{m} dx = \frac{1}{m^2 \sqrt{m}} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{3 - 4y^2}{1 + x^4} \right)^2 dx$$

$$\Rightarrow \|f_m\|_2 = \frac{c}{m^{5/4}} \text{ e quindi } \sum_n \|f_n\|_2 < +\infty$$

per cui la serie converge in  $L^2$

(2) integrale =  (CALCOLI NELLE FACCIATE BIANCHE);

(3a)  $\tilde{\omega} =$  ,  $a_0 =$

$a_n =$  b\_n =

(3b) la serie converge uniformemente  si  no ; infatti

dato che  $|a_n| \approx \frac{1}{n^2}$  e  $b_n = 0$  si ha

$$\sum_n |a_n| + |b_n| \text{ converge } \Rightarrow$$

la serie conv. unif.

(3c) l'equazione ha soluzione  si  no ; se sì la soluzione è unica  si  no .

voto

Cognome: 


Nome: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matricola: 

--	--	--	--	--	--

(4a) La soluzione  $y(t)$  è data da: (CALCOLI NELLA FACCIATA BIANCA)

$$y(t) = \frac{1}{3} \left( e^{-2|t|} - 2 e^{-|t|} \right)$$

(4b) La soluzione  $y(t)$  è data da:

$$y(t) = \frac{H(t)}{5} \left( e^t - e^{-t} - \sin(2t) \right)$$

(4c) La soluzione  $y(t)$  è data da:

$$y(t) = -\frac{1}{2} \sin(t)$$

(5a) Le soluzioni  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  sono date da:

$$y_1(t) = A + Bt + \frac{t^2}{2}$$

$$y_2(t) = C - D - 1 + (D+1)e^t - t$$

(5b) Le soluzioni  $y(t)$ , sono date da:

$$y(t) = \begin{cases} A + Bt + \frac{t^2}{2} & \text{se } t < 0 \\ 2A - B - 1 + (B - A + 1)e^t - t & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

$$A, B \in \mathbb{R}$$

(5c) Le soluzioni derivabili del problema sono:

le sol. derivabili sono quelle con  $A=0$   
cioè quelle tali che  $y(0)=0$

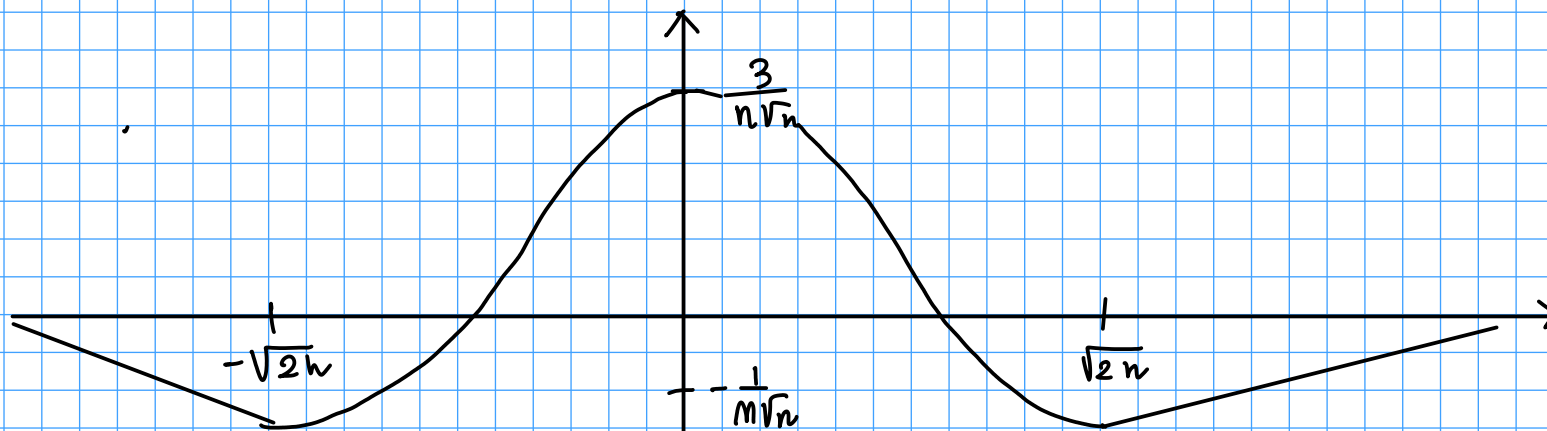
1)  $f_m(x) = \frac{3m - 4x^2}{\sqrt{m}(m^2 + x^4)}$ . Allora  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 0$ .

$$f'_m(x) = -\frac{4x(2m - x^2)(m + 2x^2)}{\sqrt{m}(m^2 + x^4)^2}$$

e quindi il grafico di  $f_m$  è così

$$f_m(\pm\sqrt{m}) = -\frac{1}{m\sqrt{m}}$$

$$f_m(0) = \frac{3}{m^2\sqrt{m}}$$



(a) È chiaro che  $\|f_m\|_\infty = \frac{3}{m\sqrt{m}}$

(b) Fissato  $x$  su  $\mathbb{R}$ ,  $|f_m(x)| \leq \frac{3}{m\sqrt{m}}$ . Dato che  $\sum_n \frac{1}{m\sqrt{m}} < +\infty$ , la serie converge per ogni  $x$ .

(c) Dato che  $\|f_m\|_\infty = \frac{3}{m\sqrt{m}} = \frac{3}{m^{3/2}} \Rightarrow \sum_m \|f_m\|_\infty < +\infty$ , dunque la

serie converge TOTALMENTE (e quindi UNIFORMEMENTE) su tutto  $\mathbb{R}$ .

Ne segue che  $S(x) = \sum_m f_m(x)$  è continua su  $\mathbb{R}$ .

(d) Essendo  $\sum_n f_n$  univ. conv. su  $\mathbb{R}$  a  $p_0$  che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_n f_n(x) = \sum_n \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_n 0 = 0$$

(CONV. UNIF.)

(e) Dato che, a n fissa,  $|f_n(x)| \approx \frac{4}{x^2}$  a  $p_0$  che le  $f_n$  sono in  $L^1(\mathbb{R})$ .

Inoltre  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3n - 4x^2}{n^2 + x^4} dx = (x = \sqrt{n}y \Leftrightarrow dx = \sqrt{n}dy)$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int \frac{3n - 4ny^2}{n^2 + n^2y^4} \sqrt{n} dy = \frac{1}{n} \int \frac{3 - 4y^2}{1 + y^4} dy = \frac{c}{n}$$

Se la serie converge in  $L_1$  a  $S(x)$ , ne seguirebbe  $S(x) \in L^1$  e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n f_n(x) dx = \sum_n \int f_n(x) dx = \sum_n \frac{c}{n} = +\infty \quad \text{ASSURDO}$$

(f) Dato che  $|f_n|^2 \approx \frac{16}{x^4}$  e  $f_n$  sono in  $L^2(\mathbb{R})$ . Inoltre

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n|^2(x) dx = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{3n - 4x^2}{n^2 + x^4} \right)^2 dx = (x = \sqrt{n}y)$$

$$\frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{3n - 4ny^2}{n^2 + n^2y^4} \right) \sqrt{n} dy = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{3 - 4y^2}{1 + y^4} \right)^2 dy = \frac{c}{n^{5/2}}$$

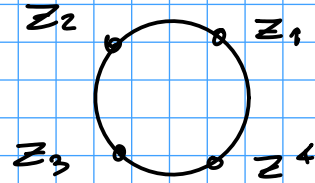
Dunque  $\|f_n\|_2 = \frac{\sqrt{c}}{n^{5/4}}$  e dato che  $\frac{5}{4} > 1$  la serie  $\sum_n \|f_n\|_2 < +\infty$

Dunque  $\sum_n f_n$  converge in  $L^2(\mathbb{R})$

(2)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{4+x^4} dx =: I$ . Possiamo e  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{4+x^4} dx = I_1$ .

Poniamo  $f(z) := \frac{e^{iz}}{4+z^4}$ . Allora  $f$  ha 4 poli che sono le radici quadrate

di 4:  $z_1, z_2, z_3, z_4$



$z_1 = 1+i$  e...

Si ha

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{e^{iz_1}}{4z_1^3} = \frac{z_1 e^{iz_1}}{4z_1^4} = -\frac{z_1}{16} e^{iz_1} = -\frac{z_1}{16} e^{z_2}$$

$$\text{Res}(f, z_2) = \frac{e^{iz_2}}{4z_2^3} = \frac{z_2 e^{iz_2}}{4z_2^4} = -\frac{z_2}{16} e^{iz_2} = -\frac{z_2}{16} z_3$$

Come è noto

$$I_1 = 2\pi i (\text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2)) = -\frac{2\pi}{16} (iz_1 e^{z_2} + iz_2 e^{z_3}) = -\frac{\pi}{8} (z_2 e^{iz_2} + z_3 e^{iz_3})$$

$$= -\frac{\pi}{8} 2 \text{Re}(z_2 e^{iz_2}) = -\frac{\pi}{4} \text{Re}((-1+i)e^{-\sqrt{2}} (\cos(1) + i \sin(1)))$$

↑ CONIUGATI

$$= -\frac{\pi}{4} e^{-1} (-\cos(1) - \sin(1)) = \frac{\pi}{4} e (\cos(1) + \sin(1)).$$

A questo punto

$$I = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{8e} (\cos(1) + \sin(1))$$

(3) È chiaro che  $\omega = 2$  e che  $b_n = 0 \forall n$  dato che  $f$  è pari.

Si ha  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) dt = \frac{1}{\pi} [\sin(t)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$ , mentre

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \cos(2nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \cdot \frac{e^{2mit} + e^{-2nit}}{2} dt =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{(2n+1)it} + e^{-(2n+1)it} + e^{(2n-1)it} + e^{-(2n-1)it}}{4} dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos[(2n+1)t] + \cos[(2n-1)t]) dt = \text{(uso le formule di Weier...)}$$

$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin((2n-1)t)}{2n-1} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$\frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin(m\pi + \pi/2)}{2n+1} + \frac{\sin(m\pi - \pi/2)}{2n-1} \right) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos(m\pi)}{2n+1} - \frac{\cos(m\pi)}{2n-1} \right) =$$

$$-\frac{4(-1)^m}{\pi} \frac{1}{4n^2-1}$$

(b) Dato che  $|a_m| \approx \frac{1}{4n^2}$  la serie  $\sum_n |a_m|$  è convergente  $\Rightarrow$

la serie di Fourier converge uniformemente

(c) Cercando la soluzione come una serie di Fourier:

$$y(t) = \sum_n \alpha_n \cos(2nt) + \beta_n \sin(2nt) \quad \text{a trovare}$$

$$(-4n^2 + 9)\alpha_n = 0 \quad \text{da cui} \quad \alpha_n = \frac{0_n}{9-4n^2}$$

$$(-4n^2 + 9)\beta_n = b_n (= 0) \quad \beta_n = 0$$

PERCHÉ  $9-4n^2 \neq 0$   
 $\forall n \in \mathbb{N}$

Dim. che  $y$  esiste unica

$$4) \quad y'' - y' = f$$

(a)  $f = e^{-2|t|}$  (cond.  $y \in L^2$ ). Usiamo Fourier; si ha

$\hat{f}(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$  e allora trasformando l'equazione

$$(-\omega^2 - 1)\hat{y} = \frac{4}{4+\omega^2} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{-4}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$$

Posto  $g(z) := \frac{-4 e^{itz}}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$

si vede che  $g$  ha 4 poli semplici:  
in  $z = \pm i$ ,  $z = \pm 2i$  e che:

$$\text{Res}(g, i) = \frac{-4 e^{itz}}{2z(z^2+4) + 2z(z^2+1)} \Big|_{z=i} = \frac{2ie^{-t}}{3}$$

$$\text{Res}(g, -i) = \frac{-4 e^{itz}}{2z(z^2+4) + 2z(z^2+1)} \Big|_{z=-i} = -\frac{2ie^t}{3}$$

$$\text{Res}(g, 2i) = \frac{-4 \quad itz}{2z(z^2+4) + 2z(z^2+1)} \Big|_{z=2i} = \frac{-i e^{-2t}}{3}$$

E QUINDI

$$\text{Res}(g, -2i) = \frac{-4 \quad itz}{2z(z^2+4) + 2z(z^2+1)} \Big|_{z=-2i} = \frac{i e^{2t}}{3}$$

$$y(t) = \begin{cases} i(\text{Res}(i) + \text{Res}(2i)) = -\frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{-2t} & \text{se } t > 0 \\ -i(\text{Res}(-i) + \text{Res}(-2i)) = -\frac{2}{3} e^t + \frac{1}{3} e^{2t} & \text{se } t < 0 \end{cases} = -\frac{2}{3} e^{-|t|} + \frac{1}{3} e^{-2|t|}$$

(b)  $f(t) = H(t) \sin(t)$  (condizione  $y(t) \rightarrow 0$  per  $t < 0$ ). Usiamo Laplace

$$\checkmark \quad f(z) = \frac{2}{4+z^2} \quad \text{Trasformando l'equazione:}$$

$$(z^2-1) \checkmark y(z) = \frac{2}{4+z^2} \Leftrightarrow \checkmark y(z) = \frac{2}{(z^2-1)(z^2+4)}$$

Posso  $g(z) = \frac{2 e^{zt}}{(z^2-1)(z^2+4)}$ , vedo che  $g$  ha i poli semplici  $\pm 1$  e  $\pm 2i$

$$\text{Res}(g, 1) = \frac{2 e^{zt}}{2z(z^2+4) + 2z(z^2-1)} \Big|_{z=1} = \frac{-e^z}{5}$$

$$\text{Res}(g, -1) = \frac{2 e^{zt}}{2z(z^2+4) + 2z(z^2-1)} \Big|_{z=-1} = \frac{e^{-t}}{5}$$

$$\text{Res}(g, i) = \frac{2 e^{zt}}{2z(z^2+4) + 2z(z^2-1)} \Big|_{z=2i} = \frac{i e^{2it}}{10}, \quad \text{Res}(g, -i) = \overline{\text{Res}(g, i)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum \text{residui} = \frac{e^t}{5} - \frac{e^{-t}}{5} - \frac{\sin(2t)}{5} \quad \text{se } t > 0, \quad y(t) = 0 \quad \text{se } t < 0$$

(c)  $f(t) = \sin(t)$  (condizione  $y \in \mathcal{P}'$ ). Use Fourier (in  $\mathcal{P}'$ ).

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)(\omega) = \frac{\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)}{2i} \Rightarrow \text{('trasformando')}$$

$$(-\omega^2 - 1) \hat{y}(\omega) = \frac{\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)}{2i} \Leftrightarrow$$

$$\hat{y}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2+1} \frac{\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)}{2i} \Leftrightarrow (\varphi(\omega) \delta(\omega-\omega_0) = \varphi(\omega_0) \delta(\omega-\omega_0))$$

$$\hat{y}(\omega) = -\frac{1}{2} \frac{\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)}{2i}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = -\frac{1}{2} \sin(t)$$

5) (a) È abbastanza chiaro che

$$y_1(t) = A + Bt + \frac{t^2}{2}, \quad \text{mentre} \quad y_2(t) = \alpha + \beta e^t - t \quad \text{dove (imponendo}$$

$$\text{le cond. iniziali)} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = C \\ \beta - 1 = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = C - D - 1 \\ \beta = D + 1 \end{cases} \quad \text{e quindi}$$

$$y_2 = C - D - 1 + (D + 1)e^t - t$$

(b) È chiaro che  $y$  deve coincidere con uno  $y_1$  per  $t < 0$  e con una  $y_2$  per  $t > 0$ . Dunque posso scrivere

$$y = Hy_2 + H^*y_1, \quad \text{dove } H^*(t) = H(-t).$$

Se  $y$  è continuo deve essere  $y_2(0) = y_1(0) \Leftrightarrow \boxed{A = C}$ . Si ha:

$$\bullet \quad y' = \delta y_2(0) + H y_2' - \delta y_1(0) + H^* y_1' = \cancel{A\delta} + H y_2' - \cancel{C\delta} + H^* y_1' = H y_2' + H^* y_1'$$

$$\bullet \quad y'' = \delta y_2'(0) + H y_2'' - \delta y_1'(0) + H^* y_1'' = \delta(B - D) + H y_2'' + H^* y_1''$$

$$\bullet \quad y \cdot H = y_2 H \Rightarrow (y \cdot H)' = \delta y_2(0) + H y_2' = A\delta + H y_2' \Rightarrow$$

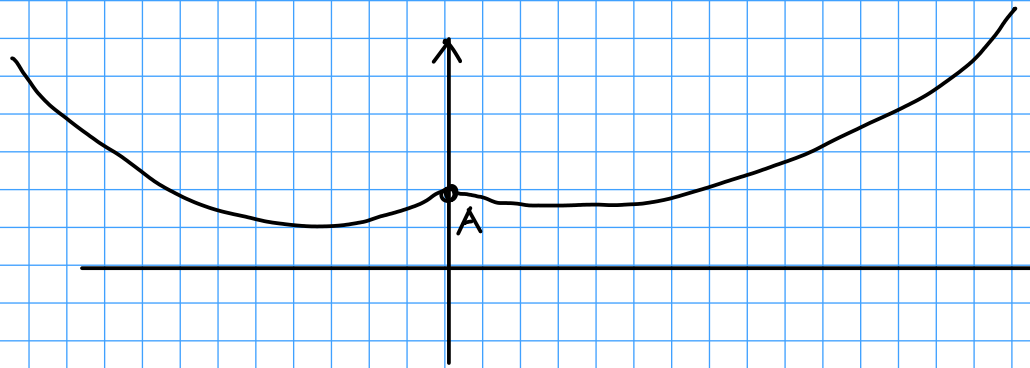
$$y'' - (Hy)' = H^*(y_1'') + H(y_2'' - y_2') + (B - D - A)\delta = 1 + (B - D - A)\delta$$

Perché  $y$  sia soluzione di  $y'' - (Hy)^\dagger = 1$  il termine con  $\delta$  deve essere nullo, cioè  $B - A = D$ . In sostanza

$$y(t) = \begin{cases} A + Bt + \frac{t^2}{2} & \text{se } t < 0 \\ 2A - B - 1 + (B - A + 1)e^t - t & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

$$C - D - 1 = A + A - B$$

$$A - B + A - 1$$



$$(y(0) = A)$$

$$y'(0^-) = B$$

$$y'(0^+) = B - A$$

(c) Per avere la derivabilità in  $t=0$  si vuole  $B = B - A$  cioè  $A = 0$ .

Le soluzioni derivabili sono quelle che partono da  $t=0$ .