L.S. in Ingegneria Energetica/Elettrica/Nucleare. Corso di Complementi di Matematica.
Compito del 10 gennaio 2012 - prima parte.

Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti negli appositi spazi del foglio risposte, aggiungendo una breve motivazione quando richiesta.

1. Sia data la successione di funzioni definite su $\mathbb{R}$ da $f_n(x) = \dfrac{3-4nx}{n+n^3x^2}$.
   (a) Calcolare la norma uniforme di ogni f_n (2 punti);
   (b) individuare l'insieme A delle x in $\mathbb{R}$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (1 punti);
   (c) dire per quali x di A la somma della serie $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è continua in x (motivando - 3 punti);
   (d) (*) dire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su A (motivando - 4 punti);
   (e) dire se le f_n sono in $L^1(\mathbb{R})$ e in caso affermativo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge in $L^1(\mathbb{R})$ (3 punti);
   (f) dire se le f_n sono in $L^2(\mathbb{R})$ e in caso affermativo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge in $L^2(\mathbb{R})$(motivando - 4 punti).

2. Si calcoli l'integrale (È RICHIESTO il procedimento - 8 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{1+x^4}\,dx$$

3. Si consideri la funzione $f(t) := \sin(|t|)$, considerata periodica di periodo $T = 2\pi$ (nonostante sia anche periodica di periodo π).
   (a) Si scrivano sul foglio risposte i parametri dello sviluppo di f in serie di Fourier nelle funzioni 2π-periodiche.; (1+1+2+2 punti);
   (b) si dica se la serie detta sopra converge uniformemente a f (motivando - 3 punti);
   (c) si usi quanto trovato sopra per dire (3 punti) se l'equazione differenziale:

$$\begin{cases} y'' + 9y = f(t) & \text{per } t \in \mathbb{R} \\ y(t)\ 2\pi\text{- periodica.} \end{cases}$$

   ha soluzione e se la soluzione è unica.

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

L.S. in Ingegneria Energetica/Elettrica/Nucleare. Corso di Complementi di Matematica.
Compito del 10 gennaio 2012 - Seconda parte.

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' = f$$

   (a) Sia $f(t) = te^{-|t|}$; si trovi (se esiste) la soluzione $y(t)$ con la condizione

   $$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} y'(t) = 0.$$

   (È RICHIESTO il procedimento - 12 p.)

   (b) Sia ora $f(t) = H(t)e^{-2t}$ dove $H(t) = 1$ per $t > 0$ e $H(t) = 0$ per $t < 0$; si trovi (6 punti) la soluzione $y(t)$ con la condizione:

   $$y(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

   (c) Sia $f = \delta'(t)$. Si trovino tutte le soluzioni y dell'equazione (eventuamente nessuna) tali che $y \in \mathcal{S}'$ (distribuzioni temperate) (4 punti).

5. (a) Si trovino le soluzioni dei due seguenti problemi di Cauchy (6 punti):

   $$\begin{cases} y_1'' + y_1' - 2y_1 = 0 \\ y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = \alpha \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y_2'' - y_2' - 2y_2 = 0 \\ y_2(0) = 1,\ y_2'(0) = \beta \end{cases}$$

   (al variare di α e β reali).

   (b) Usando il punto precedente si trovino (4 punti) tutte le funzioni continue che verificano

   $$\begin{cases} y'' + (\mathrm{sgn}(t)y)' + 2y = 0 & \text{nel senso delle distribuzioni} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   (c) Analogamente al caso precedente si risolva il problema

   $$\begin{cases} y'' + (\mathrm{sgn}(t)y)' + 2y = 0 & \text{nel senso delle distribuzioni} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e si dica (4 punti) se c'è una differenza qualitativa tra le sue soluzioni e quelle del problema precedente.

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

L.S. INGEGNERIA ENERGETICA/ELETTRICA/NUCLEARE
COMPITO DI COMPLEMENTI DI MATEMATICA - I^a PARTE - 10 GENNAIO 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

(1a) $\|f_n\|_\infty = \boxed{\frac{4}{n}}$; **(1b)** $A = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$;

(1c) s è continua per x $\neq 0$ (cioè $x \in A$), infatti:

Se $\varepsilon > 0$ e se $A_\varepsilon = \{x : |x| \geq \varepsilon\}$ allora $\|f_n\|_{\infty, A_\varepsilon} \simeq \frac{4\varepsilon}{n^2} \Rightarrow \sum_n \|f_n\|_{\infty, A_\varepsilon} < +\infty$.
Se ne ricava $\sum_n f_n$ continua su A_ε $\forall \varepsilon > 0$ da cui $\sum_n f_n$ continua su A.

(1d) (*) la serie converge uniformemente su A sì ~~no~~, infatti:

Se $S_m = \sum_n f_n$ convergesse unif. a S su A, allora S_m sarebbe di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{\infty, A}$. Ma è ovvio che $\|S_n - S_m\|_{\infty, A} = \|S_n - S_m\|_{\infty, \mathbb{R}}$. Ma allora S_m avrebbe limite uniforme e una funzione $\tilde{S}$ continua su $\mathbb{R}$. In particolare $S_m(0) \to \tilde{S}(0)$ contro il fatto che la serie diverge in zero.

(1e) le $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ sì ~~no~~; la serie $\sum_n f_n$ converge in $L^1(\mathbb{R})$ sì ~~no~~;

(1f) le $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ ~~sì~~ no ; la serie $\sum_n f_n$ converge in $L^2(\mathbb{R})$ ~~sì~~ no , infatti:

$$\|f_n\|_2^2 = \frac{1}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{3-4nx}{1+n^2x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{n^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{3-4y}{1+y^2}\right)^2 dy$$

da cui $\|f_n\|_2 = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot$ costante. Allora

$\sum_n \|f_n\|_2 = \text{cost.} \sum_n \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty \quad (3/2 > 1)$

e quindi $\sum_n f_n$ converge in L^2

(2) integrale = $\boxed{\frac{\cos(\sqrt{2})+\sin(\sqrt{2})}{2\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}}\pi}$ (CALCOLI NELLE FACCIATE BIANCHE);

(3a) $\tilde{\omega} = \boxed{1}$, $a_0 = \boxed{\frac{2}{\pi}}$

$a_n = \boxed{\frac{2}{\pi}\,\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\,(*)}$, $b_n = \boxed{0}$;

(3b) la serie converge uniformemente ~~sì~~ no ; infatti

$|a_n| \simeq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum |a_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ la serie converge uniformemente

(3c) l'equazione ha soluzione ~~sì~~ no ; se sì la soluzione è unica sì ~~no~~ .

SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO **(1d)**

* se $n=1$ $a_1 = 0$, facendo i calcoli si vede che il numeratore $(-1)^n+1=0$ è presente prima dell'integrazione

L.S. INGEGNERIA ENERGETICA/ELETTRICA/NUCLEARE
COMPITO DI COMPLEMENTI DI MATEMATICA-2^a PARTE - 10 GENNAIO 2012

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

(4a) La soluzione $y(t)$ è data da: (CALCOLI NELLA FACCIATA BIANCA)

$$y(t) = \begin{cases} -t\,e^{-t} - \frac{4}{9}e^{-2t} & \text{se } t \geq 0 \\ \frac{t\,e^{t}}{3} - \frac{4}{9}e^{t} & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

(4b) La soluzione $y(t)$ è data da:

$$y(t) = -\frac{H(t)}{4}\left(2t\,e^{-2t} + e^{-2t} - 1\right)$$

(4c) La soluzione $y(t)$ è data da:

$$y(t) = H(t)\,e^{-2t}$$

(5a) Le soluzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono date da:

$$y_1(t) = \frac{1-\alpha}{3} e^{-2t} + \frac{2+\alpha}{3} e^{t}$$

$$y_2(t) = \frac{1+\beta}{3} e^{2t} + \frac{2-\beta}{3} e^{-t}$$

(5b) Le soluzioni $y(t)$, sono date da:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{3} e^{-2t} + \frac{2+\alpha}{3} e^{t} & \text{per } t \geq 0 \\ \frac{1+\beta}{3} e^{2t} + \frac{2-\beta}{3} e^{t} & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ TALI CHE $\boxed{\beta - \alpha = 2}$

(5c) Le soluzioni del problema con dato nullo, rispetto a quelle del problema precedente:

sono derivabili in zero:

$y'(0^+) = y'(0^-)$

SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO **(4a)**

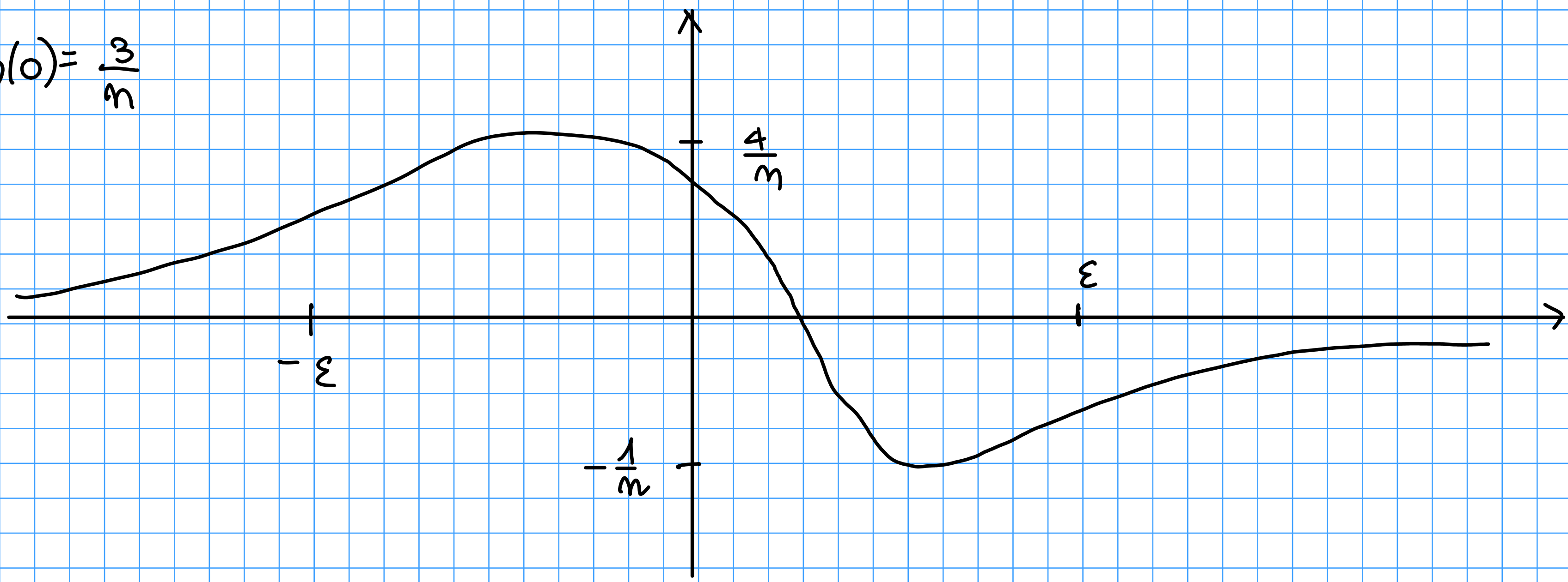
(1) $f_n(x) = \dfrac{3-4nx}{n+n^3x^2}$. Si ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$ e

$$f_n'(x) = \frac{1}{n}\,\frac{-4n(1+n^2x^2)-(3-4nx)2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{4n^2x^2-6nx-4}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2(nx-2)(2nx+1)}{(1+n^2x^2)^2}$$

$f_n'(x) = 0 \iff x = \dfrac{2}{n}$ o $x = -\dfrac{1}{2n}$

$f_n\left(\dfrac{2}{n}\right) = -\dfrac{1}{n}$ $\qquad f_n\left(-\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{4}{n}$ $\qquad$ SE NE RICAVA IL GRAFICO

$f_n(0) = \dfrac{3}{n}$



(a) Dal grafico si vede che $\|f_n\|_\infty = \dfrac{4}{n}$ $\left(\dfrac{4}{n} > \dfrac{1}{n}\right)$

(b) Se $x \neq 0$ $\quad |f_n(x)| \simeq \dfrac{4}{n^2x} \Rightarrow \sum\limits_n f_n(x)$ CONVERGE

$f_n(0) = \frac{3}{n} \Rightarrow \sum_n f_n(0)$ DIVERGE

Dunque $A = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x : x \neq 0\}$

(c) Se fisso $\varepsilon > 0$ posso considerare $A_\varepsilon = \{x : |x| \geq \varepsilon\}$. Allora per n grande $\|f_n\|_{\infty, A_\varepsilon} = \max\left(|f_n(-\varepsilon)|, |f_n(\varepsilon)|\right) = f_n(-\varepsilon) \simeq \frac{4\varepsilon}{n^2}$ (come si vede dal grafico). Ne segue che $\sum_n \|f_n\|_{\infty, A_\varepsilon} < +\infty$

$\Rightarrow \sum_n f_n$ converge totalmente su A_ε. Dunque $\sum_n f$ è continua su A_ε. Essendo ε arbitrario si ricava $\sum_n f_n$ continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(d) VEDI RIQUADRO RISPOSTE: In particolare il fatto che $\|S_n - S_m\|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} |S_n(x) - S_m(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(x) - S_m(x)| = \|S_n - S_m\|_{\infty, \mathbb{R}}$ dipende dal fatto che le funzioni $S_n - S_m$ sono continue.

(e) Dato che $f_n(x) \simeq \frac{4}{n} \frac{1}{x}$ (rispetto a $x \to \pm\infty$) si ha che f_n NON È INTEGRABILE su $\mathbb{R}$.

(f) Per lo stesso motivo di (e) $f_n^2(x) \simeq \frac{16}{n^2} \frac{1}{x^2}$ che è integrabile su $\mathbb{R} \Rightarrow f_n \in L^2(\mathbb{R})$. Inoltre

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)^2 = \frac{1}{n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3 - 4nx}{1 + n^2x^2}\right)^2 dx = \left(\begin{array}{l} \text{Pongo } nx = y \\ \Rightarrow dx = \frac{dy}{n} \end{array}\right)$$

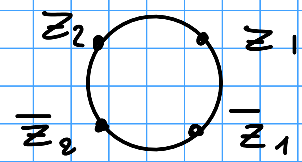
$$\frac{1}{n^2}\int\left(\frac{3-4y}{1+y^2}\right)^2\frac{dy}{n} = \frac{c}{n^3} \Longrightarrow \|f_n\|_2 = \frac{\sqrt{c}}{n^{3/2}}.$$ Dato che $3/2 > 1$

$\sum_n \|f_n\|_2 < +\infty$ e quindi $\sum_n f_n$ converge in $L^2(\mathbb{R})$

(2) $$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{1+x^4}\,dx .$$ Passiamo a $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{1+x^4}\,dx$$

Quest'ultimo è uguale a $2\pi i \sum_{\substack{1+w^4=0\\ \operatorname{Im}(w)>0}} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{1+z^4}, w\right)$.

I poli sono le radici quarte di -1



($z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$) e allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{1+x^4} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(z_1) + \operatorname{Res}(z_2)\right) = 2\pi i\left(\frac{e^{2iz_1}}{4z_1^3} + \frac{e^{2iz_2}}{4z_2^3}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(z_1\frac{e^{2iz_1}}{z_1^4} + z_2\frac{e^{2iz_2}}{z_2^4}\right) = \left(z_1^4 = z_2^4 = -1\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(iz_1 e^{2iz_1} + iz_2 e^{2iz_2}\right) = \left(iz_1 \text{ e } iz_2 \text{ sono coniugati!}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2}\, 2\operatorname{Re}\left(iz_1 e^{2iz_1}\right) = -\pi \operatorname{Re}\left(\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)e^{2\frac{(-1+i)}{\sqrt{2}}}\right) =$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}} \operatorname{Re}\left((-1+i)(\cos(\sqrt{2}) + i \sin(\sqrt{2}))\right) =$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}} \left(-\cos(\sqrt{2}) - \sin(\sqrt{2}) \right) = \frac{\pi\,(\cos(\sqrt{2}) + \sin(\sqrt{2}))}{\sqrt{2}\; e^{\sqrt{2}}} \quad (\in \mathbb{R})$$

Dunque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{1+x^4} = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{1+x^4} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}} \left(\cos(\sqrt{2}) + \sin(\sqrt{2})\right)$

(e l'analogo integrale con $\sin(2x)$ fa zero). Dato che l'integrando è pari l'integrale su $[0, +\infty[$ fa metà del numero scritto sopra

(3) $T = 2\pi$, $\omega = 1$. Se scriviamo $f = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$

si ha $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin|t| \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) =$

$$= \frac{1}{\pi} \Big[-\cos(t) \Big]_0^{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

Se $k \geq 1$ $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin|t| \cos(kt) \, dt =$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \cos(kt) dt =$ (per parti) $\frac{2}{\pi} \underbrace{\Big[\sin(t) \frac{\sin(kt)}{k} \Big]_0^{\pi}}_{= 0} +$

$- \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(t) \sin(kt) \, dt = - \frac{2}{k\pi} \Big[\cos(t) \frac{(-\cos(kt))}{k} \Big]_0^{\pi} + \frac{2}{k^2 \pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \cos(kt) dt$

$\Rightarrow \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \int_0^{\pi} \sin(t) \cos(kt) \, dt = \frac{2}{k^2 \pi} \left(-(-1)^k - 1 \right)$ DUNQUE

$$\boxed{a_k = - \frac{2}{\pi} \frac{(1 + (-1)^k)}{k^2 - 1}}$$

(in particolare $a_k = 0$ se k è dispari)

$b_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(|x|) \sin(kx) = \boxed{0}$ (essendo l'integrando dispari)

- Dato che i coefficienti sono infinitesimi dell'ordine di $\frac{1}{n^2}$ si ho che $\sum_n |a_n| < +\infty$ (e ovviamente $\sum_n |b_n| < +\infty$), da cui la serie di Fourier converge uniformemente.

Se si studia la risolubilità dell'equazione

$$\begin{cases} y'' + 9y = f \\ y \quad 2\pi \text{ periodica} \end{cases}$$

scrivendo y in serie di Fourier: $y = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)$

si trovano le condizioni

$$(9 - k^2)\alpha_k = a_k \qquad (9 - k^2)\beta_k = b_k \ (=0)$$

che permette di ricavare $\beta_k = 0 \ \forall k$ e $\alpha_k = \dfrac{a_k}{9 - k^2}$ <u>se $k \neq 3$</u>

Per $k = 3$ la condizione sopra è verificabile $\iff a_3 = 0$.

Dato che 3 è dispari <u>questo è vero</u>. Perciò tale condizione è, a questo punto, verificata per ogni valore di α_3 e quindi la soluzione <u>non è unica</u>.

(4) (a) Abbiamo $f(t) = t\, e^{-|t|} = t\, g(t)$. Dato che

$$\hat{g}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \Rightarrow \mathcal{F}\left(t\, g(t)\right) = i \frac{d}{d\omega} \hat{g}(\omega) = -\frac{4i\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

Dunque trasformando secondo Fourier l'equazione $y'' + 4y' = f \Rightarrow$

$$(-\omega^2 + 2i\omega)\, \hat{y}(\omega) = -\frac{4i\omega}{(1+\omega^2)^2} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{4i}{(1+\omega^2)^2(\omega-2i)}$$

(Notiamo che è possibile scrivere $\hat{y}$ in L^2 dato che $\hat{f}(0) = 0$).

Poniamo $h(z) := \dfrac{4i\, e^{izt}}{(1+z^2)^2(z-2i)}$. Si ha

$$\mathrm{Res}(h, i) = \frac{d}{dz} \frac{4i\, e^{izt}}{(z+i)^2(z-2i)}\Bigg|_{z=i} =$$

$$\frac{4i \cdot it \cdot e^{izt}(z+i)^2(z-2i) - 4i\, e^{izt}\left[2(z+i)(z-2i) + (z+i)^2\right]}{(z+i)^4 (z-2i)^2}\Bigg|_{z=i} =$$

$$\frac{-4\, t\, e^{-t}(-4)(-i) - 4i\, e^{-t}\left[2 \cdot 2i(-i) - 4\right]}{16 \quad (-1)} = i\, t\, e^{-t}$$

$$\mathrm{Res}(h, -i) = \frac{d}{dz} \frac{4i\, e^{izt}}{(z-i)^2 (z-2i)} \Bigg|_{z=-i} =$$

$$\frac{4i \cdot it \cdot e^{izt} (z-i)^2 (z-2i) - 4i\, e^{izt} \left[2(z-i)(z-2i) + (z-i)^2 \right]}{(z-i)^4 (z-2i)^2} \Bigg|_{z=-i} =$$

$$\frac{-4t\, e^{t} (-4)(-3i) - 4i\, e^{t} \left[2(-2i)(-3i) - 4 \right]}{16 \cdot (-9)} =$$

$$\frac{i t e^t}{3} - \frac{i 4 e^t}{9}.$$

$$\mathrm{Res}(h, 2i) = \frac{4i\, e^{-izt}}{(1+z^2)^2} \Bigg|_{z=2i} = \frac{4i\, e^{-2t}}{9}$$

Ne segue che

$$y(t) = \begin{cases} i\left(\mathrm{Res}(i) + \mathrm{Res}(2i)\right) = -t\, e^{-t} - \frac{4}{9} e^{-2t} & \text{se } t \geq 0 \\ (-i)\,\mathrm{Res}(-i) = \frac{t\, e^t}{3} - \frac{4}{9} e^t & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

(b) $f(t) = H(t)e^{-2t}$. Trasformando con Laplace $\check{f}(z) = \frac{1}{z+2}$

Trasformando l'equazione $(z^2+2z)\check{y}(z) = \frac{1}{z+2} \iff$

$$\check{y}(z) = \frac{1}{(z+2)^2 z}.$$ Posto $h(z) = \frac{e^{zt}}{(z+2)^2 z}$ si ha

$$\operatorname{Res}(h,-2) = \frac{d}{dz}\frac{e^{zt}}{z}\Big|_{z=-2} = \frac{t e^{zt} z - e^{zt}}{z^2}\Big|_{z=-2} = -\frac{t e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4}$$

$$\operatorname{Res}(h,0) = \frac{e^{zt}}{(z+2)^2}\Big|_{z=0} = \frac{1}{4}.$$ Ne segue

$$y(t) = \begin{cases} \sum \text{residui} = -\frac{t e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{1}{4} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

(c) Usiamo Fourier (dato che si cercano sol. in $\mathcal{S}'$). Si ha $\mathcal{F}(\delta') = i\omega$. Allora

$(-\omega^2 + 2i\omega)\hat{y}(\omega) = i\omega \iff \hat{y}(\omega) = \frac{-i}{\omega - 2i}$ ($\omega - 2i$ non ha radici reali).

Si ha $\operatorname{Res}\left(\frac{-ie^{izt}}{z-2i}, 2i\right) = -ie^{-2t}$ da cui

$$y(t) = \begin{cases} i \operatorname{Res}(2i) = e^{-2t} & \text{se } t \geq 0 \\ = 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} = H(t)e^{-2t}$$

(5) (a) Dobbiamo risolvere i due problemi

$$(P.1)\begin{cases} y_1'' + y' - 2y = 0 \\ y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = \alpha \end{cases}$$

$(\alpha, \beta$ parametri$)$

$$(P.2)\begin{cases} y_2'' - y_2' - 2y = 0 \\ y_2(0) = 1, \quad y_2'(0) = \beta \end{cases}$$

Per risolvere (P.1.) possiamo, per esempio, usare la trasformata di Laplace

per $v_1 = H(t)y_1 \Rightarrow v_1' = \delta\, y_1(0) + H(t)y_1'(t) = \delta + Hy_1'$ e

$v_2'' = \delta' + \delta\, y_1'(0) + H(t)y'' = \delta' + \alpha\delta + H(t)y''$; allora

$$\mathcal{L}(v_1'' + v_1' - 2v) = \mathcal{L}\Big(H(t)\underbrace{(y_1'' + y_1' - 2y)}_{=0}\Big) + \mathcal{L}(\delta' + (\alpha+1)\delta) = z + (\alpha+1)$$

per le proprietà di $\mathcal{L}$ si ottiene

$$\tilde{v}(z) = \frac{z + (\alpha+1)}{z^2 + z - 2} = \frac{z + (\alpha+1)}{(z+2)(z-1)} . \quad \text{Pongo } g(z) = \frac{z+1+\alpha}{z^2+z-2}\, e^{zt}$$

ANTITRASFORMANDO: se $t>0$ $\quad v(t) = \mathrm{Res}(g(z), -2) + \mathrm{Res}(g(z), 1) =$

$$\frac{z+1+\alpha}{z-1}\,e^{zt}\Big|_{z=-2}+\frac{z+1+\alpha}{z+2}\,e^{zt}\Big|_{z=1}=\frac{1-\alpha}{3}e^{-2t}+\frac{2+\alpha}{3}e^{t}$$

Dunque $\boxed{y_1(t)=\frac{1-\alpha}{3}e^{-2t}+\frac{2+\alpha}{3}e^{t}}$

Per risolvere (P.2) conviene prendere $w(t)=y_2(-t)$ e notare che $w'(t)=-y_2'(t)$ e $w''(t)=y_2''(t)$, dunque se y_2 risolve (P.2) la w risolve $w''+w'-2w$, $w(0)=1$, $w'(0)=-\beta$.

Usando quanto visto per (P.1) si ha

$$w(t)=\frac{1+\beta}{3}e^{-2t}+\frac{2-\beta}{3}e^{t}\Rightarrow\boxed{y_2(t)=\frac{1+\beta}{3}e^{2t}+\frac{2-\beta}{3}e^{-t}}$$

(b) È naturale cercare $y(t)$ come

$$y(t)=\begin{cases}y_1(t) & \text{se } t\geq 0\\ y_2(t) & \text{se } t\leq 0\end{cases}\iff y(t)=H(t)y_1(t)+H(-t)y_2(t)$$

(H è la funzione di Heavyside). Allora:

$$y'(t)=\delta(t)y_1(t)+H(t)y_1'(t)-\delta(t)y_2(t)+H(t)y_2'(t)=$$

$$\delta\, \cancel{y_1(0)} - \delta\, \cancel{y_2(0)} + H(t)\, y_1'(t) + H(-t)\, y_2'(t) =$$

$$H(t)\, y_1'(t) + H(-t)\, y_2'(t)$$

- $$y''(t) = \delta(t)\, y_1'(t) + H(t)\, y_1''(t) - \delta(t)\, y_2'(t) =$$
$$(\alpha - \beta)\, \delta(t) + H(t)\, y_1'' + H(-t)\, y_2''$$

- $$\text{sign}(t)\, y(t) = H(t)\, y_1(t) - H(-t)\, y_2(t) \Rightarrow$$
$$(\text{sign}(t)\, y(t))' = \delta(t)\, y_1(t) + H(t)\, y_1'(t) - \delta(t)\, y_2(t) - H(-t)\, y_2'(t) =$$
$$2\delta(t) + H(t)\, y_1'(t) - H(-t)\, y_2'(t)$$

<u>QUINDI</u>

$$y'' + (\text{sign}(t)\, y(t))' - 2y(t) =$$
$$(2 + \alpha - \beta)\, \delta + H(t)\underbrace{(y_1'' + y_1' - 2y)}_{=0} + H(-t)\underbrace{(y_2'' - y_2' - 2y)}_{=0}$$

Perché y sia soluzione bisogna che <u>$2 + \alpha - \beta = 0$</u>

(c) Ripetendo gli stessi calcoli dei punti precedenti, con la condizione $y_1(0)=0$, $y_2(0)=0$, si trova:

$$\boxed{y_1(t) = \frac{-\alpha}{3} e^{-2t} + \frac{\alpha}{3} e^{t}}$$

$$\boxed{y_2(t) = \frac{\beta}{3} e^{2t} - \frac{\beta}{3} e^{-t}}$$

$\Rightarrow$ posto $y(t) = H(t)\, y_1 + H(-t)\, y_2$

si trova $\alpha - \beta = 0 \iff \alpha = \beta$. DUNQUE STAVOLTA y è DERIVABILE in zero.