L.S. in Ingegneria Energetica/Elettrica/Nucleare. Corso di Complementi di Matematica.
Compito del 14 settembre 2011 - prima parte.

Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti negli appositi spazi del foglio risposte, aggiungendo una breve motivazione quando richiesta.

1. Sia data la successione di funzioni definite su $\mathbb{R}$ da $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{x^4 + n^3}$.
   (a) Calcolare la norma uniforme di ogni f_n (2 punti);
   (b) individuare l'insieme A delle x in $\mathbb{R}$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (1 punti);
   (c) dire per quali x di A la somma della serie $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è continua in x (motivando - 3 punti);
   (d) (*) dire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$ (motivando - 4 punti);
   (e) dire se le f_n sono in $L^1(\mathbb{R})$ e in caso affermativo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n(x)}{n}$ converge in $L^1(\mathbb{R})$;
   (f) dire se le f_n sono in $L^2(\mathbb{R})$ e in caso affermativo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n(x)}{n}$ converge rispetto alla norma di $L^2(\mathbb{R})$(motivando - 4 punti).
2. Si calcoli l'integrale (È RICHIESTO il procedimento - 8 punti)
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2 + 4x + 5))}\, dx$$
3. Si consideri la funzione f_α, dipendente dal parametro $\alpha \in]0, \pi[0$, definita da
$$f_\alpha(t) := \begin{cases} \alpha & \text{se } |t| \le \pi - \alpha, \\ \pi - |t| & \text{se } \pi - \alpha \le |t| \le \pi. \end{cases}$$
   per $t \in [-\pi, \pi]$ ed estesa su $\mathbb{R}$ in modo da essere periodica.
   (a) Si scrivano sul foglio risposte i parametri dello sviluppo di f_α in serie di Fourier $\sum_{n \ge 0} a_n \cos(n\tilde{\omega}t) + b_n \sin(n\tilde{\omega}t)$ (naturalmente la risposta dipende da α); (1+1+2+2 punti);
   (b) si dica se la serie detta sopra converge uniformemente a f_α (motivando - 3 punti);
   (c) si usi quanto trovato sopra per dire (3 p.) per quali $\alpha \in]0, \pi[$ (eventualmente nessuno) è possibile risolvere l'equazione differenziale:
$$\begin{cases} y'' + 9y = f_\alpha(t) & \text{per } -\pi < t < \pi \\ y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

L.S. in Ingegneria Energetica/Elettrica/Nucleare. Corso di Complementi di Matematica.
Compito del 14 settembre 2011 - Seconda parte.

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 5y = f$$

   (a) Sia $f(t) = e^{-2|t|}$; si trovi la soluzione $y(t)$ con la condizione

   $$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} y'(t) = 0.$$

   (È RICHIESTO il procedimento - 12 p.)

   (b) Sia ora $f(t) = H(t)e^{2t}$ dove $H(t) = 1$ per $t > 0$ e $H(t) = 0$ per $t < 0$; si trovi la soluzione $y(t)$ con la condizione: (6p.)

   $$y(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

   (c) Con la stessa condizione del punto precedente si trovi la soluzione per $f = \delta(t-1)$ (6p.).

5. (a) Si descrivano le distribuzioni u che risolvono l'equazione: (4 p.)

   $$(t^3 + 27)u(t) = 1;$$

   (b) (*) si descrivano le distribuzioni u che risolvono l'equazione: (4 p.)

   $$\sin(2t)u(t) = \delta;$$

   (c) Si calcoli la trasformata di Fourier di $u(t) := t\sin(2t)$ (4 p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

L.S. INGEGNERIA ENERGETICA/ELETTRICA/NUCLEARE
COMPITO DI COMPLEMENTI DI MATEMATICA - I^a PARTE - 14 SETTEMBRE 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

(1a) $\|f_n\|_\infty = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{n}}}$; **(1b)** $A = \boxed{\mathbb{R}}$;

(1c) s è continua per x $\in \mathbb{R}$, infatti:

Fissato $M>0$ si ha che, per n grande,
$\|f_n\|_{\infty,[-M,M]} = f_n(M) = \frac{nM^2}{M^4+n^3} \simeq \frac{M^2}{n^2}$

Dunque $\sum_n \|f_n\|_{\infty,[-M,M]} < +\infty$, cioè la serie conv. totalmente ($\Rightarrow$ unif.) su $[-M,M]$.
Allora la somma è continua su $[-M,M]$ ed essendo M arbitrario, essa è continua su $\mathbb{R}$

(1d) (*) la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$ sì ~~no~~, infatti:

Se conv. unif su $\mathbb{R} \Rightarrow$
$\lim_{x\to+\infty} \sum_n f_n(x) = \sum_n \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$.

Ma se m è intero
$\sum_n f_n(m^{3/4}) \geq \sum_{n=1}^{m} f_n(m^{3/4}) = \sum_{n=1}^{m} \frac{n\, m^{3/2}}{m^3+n^3}$
$\geq \sum_{n=1}^{m} \frac{n\, m^{3/2}}{2m^3} = \frac{1}{2m^{3/2}} \sum_{n=1}^{m} n = \frac{1}{2m^{3/2}} \frac{m(m+1)}{2}$
$\simeq \frac{\sqrt{m}}{4} \to +\infty$ se $m \to \infty$. ASSURDO

(1e) le $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ ~~sì~~ no ; la serie $\sum_n \frac{f_n}{n}$ converge in $L^1(\mathbb{R})$ sì ~~no~~ ;

(1f) le $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ ~~sì~~ no ; la serie $\sum_n \frac{f_n}{n}$ converge in $L^2(\mathbb{R})$ ~~sì~~ no , infatti:

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{(n^3+x^4)^2}\,dx = \left(x = n^{3/4}y,\ dx = n^{3/4}dx\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^3 y^4}{n^6(1+y^4)^2}\, n^{3/4}\,dy = \frac{1}{n^{9/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^4}{(1+y^4)^2}\,dx \Rightarrow$$

$$\left\|\frac{f_n}{n}\right\|_{L^2} = \frac{1}{n^{9/8}} \text{ costante} \Rightarrow \sum_n \left\|\frac{f_n}{n}\right\|_{L^2} < +\infty$$

dato che $\frac{9}{8} > 1$. Dunque la serie $\sum_n \frac{f_n}{n}$ conv. in $L^2(\mathbb{R})$

(2) integrale = $\frac{\pi}{5e}\left(2\sin(4) - \cos(4)\right) + \frac{\pi}{5}$ (CALCOLI NELLE FACCIATE BIANCHE);

(3a) $\tilde{\omega} = 1$, $a_0 = \frac{\alpha - \alpha^2}{2\pi}$, $a_n = 2\frac{(-1)^n - \cos(n(\pi-\alpha))}{\pi n^2}$, $b_n = 0$;

(3b) la serie converge uniformemente ~~sì~~ no ; infatti

$b_n = 0$ e $\sum_n |a_n| < +\infty$ dato che gli a_n sono dell'ordine di $\frac{1}{n^2}$

(3c) l'equazione ha soluzione per $\alpha = \frac{2}{3}\pi$;

SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO **(1d)**

L.S. INGEGNERIA ENERGETICA/ELETTRICA/NUCLEARE
COMPITO DI COMPLEMENTI DI MATEMATICA-2^a PARTE - 14 SETTEMBRE 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

(4a) La soluzione $y(t)$ è data da: (CALCOLI NELLA FACCIATA BIANCA)

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2t}}{17}\left(4\sin(t) - 16\cos(t) + 17\right) & \text{se } t > 0 \\ \dfrac{e^{2t}}{17} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

(4b) La soluzione $y(t)$ è data da:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}\left(\cos(t) + 4\sin(t)\right)}{17} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

(4c) La soluzione $y(t)$ è data da:

$$y(t) = \begin{cases} e^{-2(t-1)}\sin(t-1) & \text{se } t > 1 \\ 0 & \text{se } t < 1 \end{cases}$$

(5a) Le soluzioni u sono date da:

$u(t) =$

$$\frac{1}{27}\left[(\mathrm{v.p})\frac{1}{t+3} - \frac{t-6}{t^2-3t+9}\right] + c\,\delta(t+3)$$

(cioè "$\frac{1}{t^3+27}$" $+ \; c\,\delta(t+3)$) per $c \in \mathbb{R}$

(5b) Le soluzioni u sono date da:

$$u(t) = -\frac{1}{2}\delta'(t) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \delta\left(t - \frac{k\pi}{2}\right)$$

con $c_k \in \mathbb{R}$

(5c) $\mathcal{F}(t\sin(2t))(\omega) =$

$$\frac{1}{2}\left[\delta'(\omega-2) - \delta'(\omega+2)\right]$$

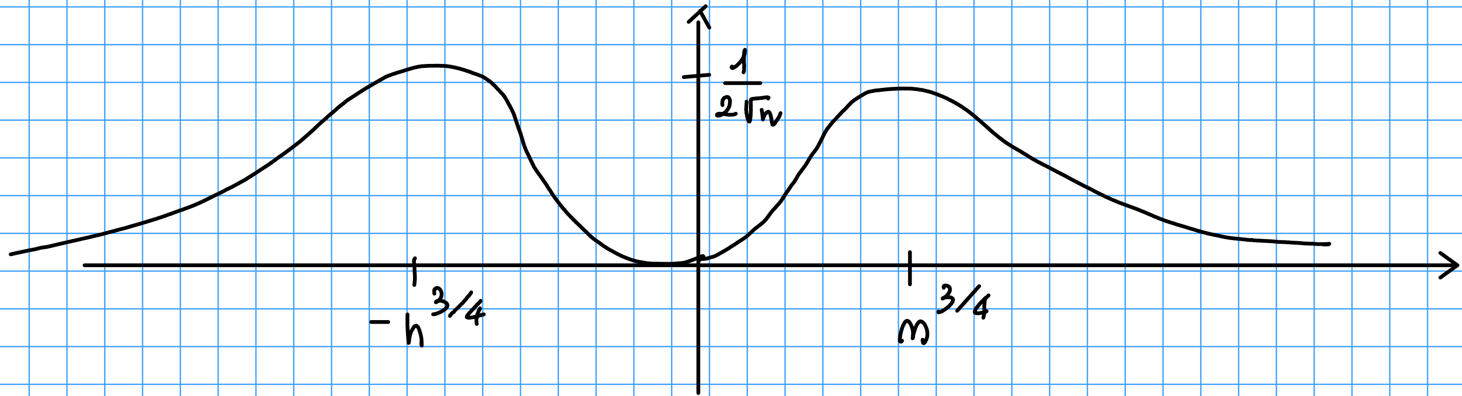
SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO **(4a)**

(1) $f_n(x) = \dfrac{n x^2}{x^4 + n^3}$, $f_n(x)$ definito $\forall x \in \mathbb{R}$; $f_n(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_n(x) = 0$

$f_n'(x) = \dfrac{n}{(x^4+n^3)^2}\left(2x(x^4+n^3) - x^2 \cdot 4x^3\right) = \dfrac{2nx}{(x^4+n^3)^2}(n^3 - x^4)$. Dunque

$f_n'(x) = 0 \iff x = \pm n^{\frac{3}{4}}$, oppure $x=0$. $f_n(\pm n^{3/4}) = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ $f_n(0)=0$



(a) Dai calcoli fatti sopra si vede che $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

(b) Dato che $|f_n(x)| \leq \dfrac{x^2}{n^2}$ si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\sum\limits_n f_n(x)$ è convergente

(visto che $\sum\limits_n \frac{1}{n^2} < +\infty$)

(c) Fissato $M \in \mathbb{R}$ si ha $\|f_n\|_{\infty,[-M,M]} = f_n(M)$ per n abbastanza grande ($n^{3/4} > M$ se $n > M^{4/3}$). Dato che $0 \le f_n(M) \le \frac{M^2}{n^2}$ la serie $\sum_n f_n$ converge totalmente ($\Rightarrow$ conv. unif.) su $[-M, M] \Rightarrow$ la somma è continua su $[-M, M]$. Dato che M è arbitrario la somma della serie è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$.

(d) La serie non conv. unif. su $\mathbb{R}$. Se lo facesse si avrebbe

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n\ge 1} f_n(x) = \sum_{n\ge 1} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \sum_{n\ge 0} 0 = 0 \,. \quad \text{MA}$$

se m è un intero fissato si ha

$$s(m^{\frac{3}{4}}) = \sum_{n\ge 1} f_n(m^{\frac{3}{4}}) \ge \sum_{n=1}^{m} \frac{n\, m^{3/2}}{m^3+n^3} \ge (\text{dato che } n \le m) \sum_{n=1}^{m} \frac{n\, m^{3/2}}{2\, m^3} = \frac{1}{2m^{3/2}} \sum_{n=1}^{m} n =$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{m^{3/2}} \frac{m(m+1)}{2} \simeq \frac{\sqrt{m}}{4}. \quad \text{Dunque} \lim_{m\to\infty} S(m^{\frac{3}{4}}) = +\infty \text{ e}$$

quindi NON È POSSIBILE che $\lim_{x\to\infty} S(x) = 0$.

(e) $\frac{f_n(x)}{n} = \frac{x^2}{x^4+n^3} \simeq \frac{1}{x^2}$ se $x \to \infty \Rightarrow \frac{f_n}{n}$ È $L^1(\mathbb{R})$.

Inoltre $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(x)}{n} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+n^3} dx = \left(x = n^{\frac{3}{4}} y ,\; dx = n^{\frac{3}{4}} dy \right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} y^2}{n^3(y^4+1)} n^{\frac{3}{4}} dy = \frac{1}{n^{3/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{y^4+1} dy \,.$$

Questo implica che

f_n NON CONVERGE IN $L^1(\mathbb{R})$. Se lo facesse, ne seguirebbe

$$\mathbb{R} \ni \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_n \frac{f_n(x)}{n} \right) dx = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(x)}{n} dx = \sum_n \frac{\text{cost}}{n^{3/4}} = +\infty \quad \text{ASSURDO}$$

(f) Per lo stesso motivo asintotico $f_n \in L^2(\mathbb{R})$. Si ha

$$\left\| \frac{f_n}{n} \right\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{n^3+x^4} \right)^2 dx = \left(x = n^{\frac{3}{4}} y, \ dx = n^{\frac{3}{4}} dy \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^{3} y^{4}}{n^6(1+y^4)^2} n^{\frac{3}{4}} dy = \frac{1}{n^{9/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^4}{(1+y^4)^2} dy.$$ Facendo la radice:

$$\left\| \frac{f_n}{n} \right\|_{L^2} = \frac{\text{costante}}{n^{9/8}}.$$ Dato che $9/8 > 1$ la serie $\sum_n \left\| \frac{f_n}{n} \right\|_2$

CONVERGE $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{n}$ CONVERGE IN L^2

(2) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2+4x+5)} dx.$$ Passiamo a $$I_1 = (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x(x^2+4x+5)} dx$$

Notiamo che l'integrando $g(x) = \dfrac{e^{2ix}}{x(x^2+4x+5)}$ ha tre poli semplici

$x = 0$, $x = -2 \pm i$. Si ha

$$\cdot\ \mathrm{Res}(g(z), 0) = \frac{e^{2iz}}{(z^2+4z+5}\Big|_{z=0} = \frac{1}{5}$$

$$\cdot\ \mathrm{Res}(g(z), -2+i) = \frac{e^{2iz}}{z(z+2+i)}\Big|_{z=-2+i} = \frac{e^{-2-4i}}{(-2+i)\cdot 2i} =$$

Per quanto visto a lezione

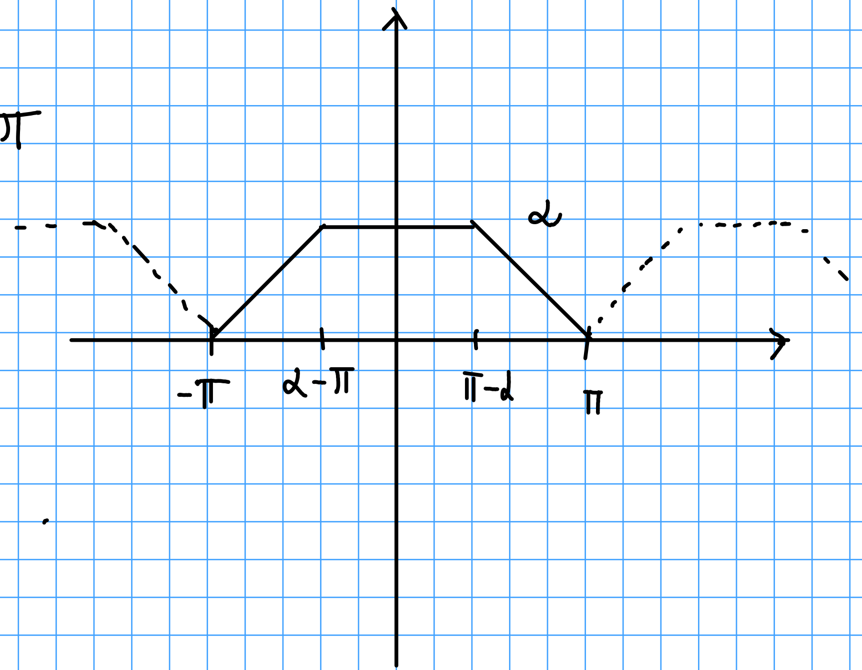
$$I_1 = 2\pi i \, \mathrm{Res}(g(z), -2+i) + \pi i \, \mathrm{Res}(g(z), 0) =$$

$$\frac{\pi e^{-2} e^{-4i}}{-2+i} + \frac{\pi i}{5} = \frac{\pi e^{-2} e^{-4i}(-2-i)}{5} + \frac{\pi i}{5}$$ da cui

$$I = \mathrm{Im}(I_1) = \boxed{\frac{\pi}{5e}\left(2\sin(4) - \cos(4)\right) + \frac{\pi}{5}}$$

3) $$f_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha & \text{se } |t| < \pi - \alpha \\ \pi - |t| & \text{se } \pi - \alpha \le |t| \le \pi \end{cases}$$

Allora f_α ha il seguente andamento



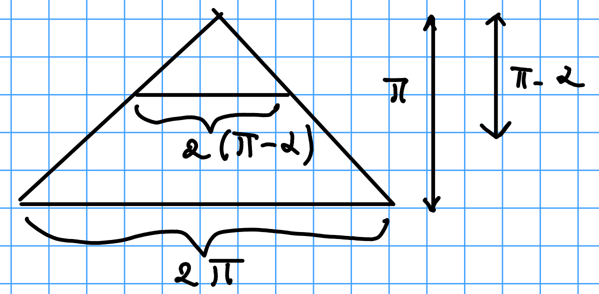
(a)

Dato che il periodo è $2\pi \Rightarrow \tilde{\omega} = 1$.

Si vuole lo sviluppo

$$f_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nt).$$

Per le formule



$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{\frac{2\pi \cdot \pi}{2}}_{\text{TRIANGOLO GRANDE}} - \underbrace{\frac{2(\pi-\alpha)(\pi-\alpha)}{2}}_{\text{TRIANGOLO PICCOLO}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\pi^2 - (\pi-\alpha)^2 \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\pi^2 - \pi^2 + 2\pi\alpha - \alpha^2 \right) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2\pi}.$$

Per $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha(t) \cos(nt)\, dt = (\text{per parti}) \ \frac{1}{\pi} \underbrace{\left[f_\alpha(t) \frac{\sin(nt)}{t} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} +$$

$$\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha'(t) \sin(nt) =$$

$$\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+\alpha} \sin(nt)\,dt - \frac{1}{n\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi} \sin(nt)\,dt \qquad \left(\text{dato che } f_\alpha'(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi \le t < -\pi+\alpha \\ 0 & \text{se } -\pi+\alpha < t < \pi-\alpha \\ -1 & \text{se } \pi-\alpha < t < \pi \end{cases}\right)$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi} \sin(nt) = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{\pi-\alpha}^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - \cos(n(\pi-\alpha))\right)$$

$b_n = 0$ dato che f_α è pari.

(b) dato che $a_n \simeq \frac{1}{n^2}$ (e i b_n sono tutti nulli)

le serie $\sum_n |a_n|$ e $\sum_n |b_n|$ sono sommabili.

Ne segue che la serie di Fourier converge uniformemente.

(c) Ricordiamo che per risolvere l'eq. $y'' + 9y = f_\alpha$, con condizione di periodicità, si cerca $y(t) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \cos(nt) + \sum_{n\geq 1} \beta_n \sin(nt)$

e si ricavano le condizioni

$$(-n^2+9)\alpha_n = a_n \qquad (-n^2+9)\beta_n = b_n$$

Queste condizioni individuano a_n e b_n per tutti gli $n \neq 3$

(in particolare $\beta_n = 0$ $\forall n \neq 0$, dato che $b_n = 0$ $\forall n$). Per $n = 3$

troviamo le condizioni "di compatibilità"

$$a_3 = 0 \qquad\qquad b_3 = 0$$

La seconda è verificata qualunque sia α. Per verificare la prima deve essere

$$\frac{2}{\pi g}\left(\left(-1\right)^3 - \cos\left(3(\pi-\alpha)\right)\right) = 0 \iff \cos(3\pi - 3\alpha) = -1 \iff$$

$$3\pi - 3\alpha = \pi + 2k\pi \quad \text{per } k \in \mathbb{Z} \iff 3\alpha = 2k\pi \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \alpha = \frac{2}{3}k\pi \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}.$$ Dato che vogliamo $0 < \alpha < \pi$

Troviamo solo $\boxed{\alpha = \frac{2}{3}\pi}$

(4) (a) Applichiamo la trasformata di Fourier all'equazione $y'' + 4y' + 5y = f$

$$\Rightarrow \quad (-\omega^2 + 4i\omega + 5)\,\hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

È facile vedere che $\hat{f}(\omega) = \dfrac{4}{\omega^2+4}$ (vedi calcoli fatti a lezione) $\Rightarrow$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{-4}{(\omega^2 - 4i\omega - 5)(\omega^2+4)}$$

Per ricavare $y(t)$ poniamo $g(z) := \dfrac{-4\, e^{itz}}{(\omega^2 - 4i\omega - 5)(\omega^2+4)}$.

I poli di g (= radici del denominatore) sono $\pm 1 + 2i$ e $\pm 2i$. Si ha

- $$\mathrm{Res}(g, 1+2i) = \frac{-4\, e^{itz}}{(2z-4i)(z^2+4) + (z^2-4iz-5)2z}\Bigg|_{z=1+2i} =$$
$$\frac{-4\, e^{(-2+i)t}}{2\left((1+2i)^2+4\right)} = \frac{-2\, e^{(-2+i)t}}{1+4i} = \boxed{\frac{-2(1-4i)}{17}\, e^{(-2+i)t}}$$

- $$\mathrm{Res}(g, -1+2i) = \frac{-4\, e^{itz}}{(2z-4i)(z^2+4) + (z^2-4iz-5)2z}\Bigg|_{z=-1+2i} =$$
$$\frac{-4\, e^{(-2-i)t}}{(-2)\left((-1+2i)^2+4\right)} = \frac{2\, e^{(-2-i)t}}{1-4i} = \boxed{\frac{2(1+4i)}{17}\, e^{(-2-i)t}}$$

$$\mathrm{Res}(g, 2i) = \frac{-4\, e^{itz}}{(2z-4i)(z^2+4) + (z^2-4iz-5)2z}\Bigg|_{z=2i} =$$
$$\frac{-4\, e^{-2t}}{4i\left((2i)^2-(4i)(2i)-5\right)} = \boxed{-i\, e^{-2t}}$$

$$\mathrm{Res}(g, -2i) = \frac{-4e^{itz}}{(2z-4i)(z^2+4)+(z^2-4iz-5)2z}\Bigg|_{z=-2i} =$$

$$\frac{-4e^{2t}}{(-4i)((-2i)^2-(4i)(-2i)-5} = \boxed{\frac{i e^{2t}}{17}}$$

Allora se $t>0$

$$y(t) = i\left[\left(\mathrm{Res}(g, 1+2i)\right) + \mathrm{Res}(g, -1+2i) + \mathrm{Res}(g, 2i)\right] =$$

$$\frac{-2(4+i)e^{-2t}e^{it} - 2(4-i)e^{-2t}e^{-it} + 17e^{-2t}}{17} =$$

$$\frac{-2}{17}e^{-2t}\, 2\,\mathrm{Re}\,(4+i)e^{it} + e^{-2t} =$$

$$\boxed{\frac{4}{17}e^{-2t}\left(\sin(t) - 4\cos(t)\right) + e^{-2t}}$$

, mentre per $t<0$

$$y(t) = (-i)\,\mathrm{Res}(g, -2i) = (-i)\frac{i e^{2t}}{17} = \frac{e^{2t}}{17}$$

(b)

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = H(t)e^{2t} \\ y(t) = 0 \quad \text{se } t<0 \end{cases}$$

Usando la trasformata di Laplace $\mathcal{L}(u) = \check{u}$:

$$(z^2+4z+5)\,\check{y}(z) = \mathcal{L}(H(t)e^{2t})(z) = \frac{1}{z-2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\check{y}(z) = \frac{1}{(z^2+4z+5)(z-2)}$$

Poniamo $g(z) := \dfrac{e^{zt}}{(z^2+4z+5)(z-2)}$, che ha poli semplici $z=2$, $z=-2\pm i$

Si ha

- $\text{Res}(g,2) = \left.\dfrac{e^{zt}}{(z^2+4z+5)}\right|_{z=2} = \dfrac{e^{2t}}{17}$
- $\text{Res}(g,-2+i) = \left.\dfrac{e^{zt}}{(z-2)(z+2+i)}\right|_{z=-2+i} = \dfrac{e^{-2t}e^{it}}{(-4+i)(2i)} =$

$$\frac{e^{-2t}}{34}(-1+4i)e^{it}$$

- $\text{Res}(g,-2-i) = \overline{\text{Res}(g,-2+i)} = \dfrac{e^{-2t}}{34}(-1-4i)e^{-it}$

Per le formule note si ha, per $t>0$

$$y(t) = \text{Res}(g_1, 2) + \text{Res}(g_1, -2+i) + \text{Res}(g_1, -2-i) =$$

$$\frac{e^{2t}}{17} + 2\,\text{Re}\left(e^{-2t} \frac{(-1+4i)}{34} e^{it} \right)$$

$$\boxed{\frac{e^{2t}}{17} - \frac{e^{-2t}}{17}\left(\cos(t) + 4\sin(t) \right)}$$

(c) RISOLVIAMO PRIMA

$$\begin{cases} y_1'' + 4y_1' + 5 = \delta \\ y_1(t) = 0 \quad \text{su } \{t<0\} \end{cases}$$

Usiamo ancora Laplace ricordando che $\hat{\delta} = 1$

$$\check{y}_1(z) = \frac{1}{z^2+4z+5}.$$

Poniamo $g(z) = \dfrac{e^{zt}}{z^2+4z+5}$

La g ha due poli semplici in $z = -2 \pm i$. Si ha:

$\bullet \ \mathrm{Res}(g, -2+i) = \left.\dfrac{e^{zt}}{2z+4}\right|_{z=-2+i} = \dfrac{e^{-2t}e^{it}}{2i} = -\dfrac{i}{2}e^{-2t}e^{it}$

$\bullet \ \mathrm{Res}(g, -2-i) = \overline{\mathrm{Res}(g, -2+i)}$

$\Longrightarrow$ se $t \geq 0$

$y_1(t) = 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Res}(g, -2+i) = \mathrm{Re}\left(-ie^{-2t}e^{it}\right) = e^{-2t}\sin(t)$

mentre se $t < 0$ $\quad y_1(t) = 0$

Dato che nell'equazione di partenza il dato è $\delta(t-1) \Rightarrow$ la soluzione $y(t) = y_1(t-1) = e^{-2(t-1)}\sin(t-1)$ se $t > 1$

mentre $y(t) = 0$ se $t < 1$

$$-\frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{-2} \qquad \frac{3 \pm 9}{2} \begin{matrix} -3 \\ 6 \end{matrix}$$

(5) (a) $\qquad (t^3+27)\,u = 1 \qquad u \in \mathcal{D}'$

Una possibile soluzione è $\overline{u}(t) = \dfrac{1}{t^3+27}$ che va intesa come

$(v.p.)\ \dfrac{A}{t+3} + \dfrac{Bt+c}{t^2-3t+9}$ con A, B, c opportuni. Facendo i calcoli si ha:

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{27}\left[(v.p.)\ \frac{1}{t+3} - \frac{t-6}{t^2-3t+9}\right]$$

A $\bar{u}$ vanno aggiunte tutte le soluzioni di $u_0(t^3+27)=0$ che sono $u_0 = c\,\delta(t+3)$, c costante arbitraria, dato che $t^3+27=0$ ha solo la radice -3, semplice. Dunque:

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{27}(\mathrm{v.p.})\frac{1}{t+3} - \frac{t-6}{t^2-3t+3} + c\,\delta(t+3) \qquad c\in\mathbb{R}}$$

(b) $$\sin(2t)\, u(t) = \delta$$

Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{u}(t)$ del tipo $\bar{c}\,\delta'(t)$.

Ricordiamo che se $\psi(t)$ è una funzione regolare $\Rightarrow$

$$\psi\,\delta' = \psi(0)\,\delta' - \psi'(0)\,\delta$$

Prendendo $\psi(t) = \sin(2t) \Rightarrow \psi'(t) = 2\cos(2t) \Rightarrow \psi'(0)=2$ e $\psi(0)=0$

$\Rightarrow \sin(2t)\,\bar{c}\,\delta'(t) = \psi(t)\,\bar{c}\,\delta'(t) = -\bar{c}\cdot 2\,\delta(t)$.

$\Rightarrow$ se prendo $\bar{u}(t) = -\frac{1}{2}\delta'(t)$ $\bar{u}$ verifica l'equazione.

A $\bar{u}$ devo aggiungere tutte le soluzioni di $\sin(2t)\,u=0$.

Notiamo che $\sin(2t)=0 \iff t = k\frac{\pi}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$ e che ognuno di questi punti ha molteplicità 1, dato che

$$\frac{d}{dt}\sin(2t)\Big|_{t=\frac{k\pi}{2}} = 2\cos\left(2k\frac{\pi}{2}\right) \neq 0 .$$ Allora le soluzioni

di $\sin(2t)\, u = 0$ sono date da $u_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \delta\left(t - k\frac{\pi}{2}\right)$

IN DEFINITIVA

$$\boxed{u(t) = -\frac{1}{2}\delta'(t) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \delta\left(t - \frac{k\pi}{2}\right) \qquad c_k \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}}$$

(3) $\mathcal{F}(t \sin(2t))$

SI HA: $\mathcal{F}(1)(\omega) = \delta(\omega)$

$\Rightarrow \mathcal{F}(e^{2it}) = \mathcal{F}(e^{2it} \cdot 1) = \delta(\omega - 2)$; $\mathcal{F}(e^{-2it}) = \delta(\omega + 2)$

$\Rightarrow \mathcal{F}(\sin(2t)) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left[\delta(\omega - 2) - \delta(\omega + 2)\right]$

$\Rightarrow \mathcal{F}(t \sin(2t)) = i \frac{d}{d\omega}\mathcal{F}(\sin(2t)) = \boxed{\frac{1}{2}\left[\delta'(\omega - 2) - \delta'(\omega + 2)\right]}$