L.S. in Ingegneria Energetica/Elettrica/Nucleare. Corso di Complementi di Matematica.
Compito del 18 luglio 2011 - prima parte.

Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti negli appositi spazi del foglio risposte, aggiungendo una breve motivazione quando richiesta.

1. Sia data la successione di funzioni definite su $[0, +\infty[$ da $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + n^2}$.
   (a) Calcolare la norma uniforme di ogni f_n (2 punti);
   (b) individuare l'insieme A delle $x \geq 0$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (1 punti);
   (c) dire per quali x di A la somma della serie $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è continua in x (motivando - 3 punti);
   (d) (*) dire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$ (motivando - 4 punti);
   (e) dire se le f_n sono in $L^1([0, +\infty[)$ e in caso affermativo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n(x)}{\sqrt{n}}$ converge in $L^1([0, +\infty[)$;
   (f) dire se le f_n sono in $L^2([0, +\infty[)$ e in caso affermativo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n(x)}{\sqrt{n}}$ converge rispetto alla norma di $L^2([0, +\infty[)$(motivando - 4 punti).
2. Si calcoli l'integrale (È RICHIESTO il procedimento - 8 punti)
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(16 + x^4)}\, dx$$
3. Si consideri la seguente funzione, dipendente dal parametro $\alpha > 0$, definita da
$$f_\alpha(t) := \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \alpha, \\ \alpha & \text{se } \alpha \leq t \leq 1. \end{cases}$$
   (a) Si scrivano sul foglio risposte i parametri dello sviluppo di f_α in serie di soli seni $\sum_{n \geq 1} u_n \sin(n\bar{\omega}t)$ in $[0, 1]$ (naturalmente la risposta dipende da α); (1+4 punti);
   (b) si dica se la serie detta sopra converge uniformemente a f_α (motivando - 3 punti);
   (c) si usi quanto trovato sopra per dire (4 p.) per quali $\alpha \in]0, 1[$ (eventualmente nessuno) è possibile risolvere l'equazione differenziale:
$$\begin{cases} y'' + 9\pi^2 y = f_\alpha(t) & \text{per } 0 < t < 1 \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

L.S. in Ingegneria Energetica/Elettrica/Nucleare. Corso di Complementi di Matematica.
Compito del 18 luglio 2011 - Seconda parte.

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 5y = f$$

   (a) Sia $f(t) = H(-t)e^t$, dove $H(t) = 1$ per $t > 0$ e $H(t) = 0$ per $t < 0$; si trovi la soluzione $y(t)$ con la condizione

$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} y'(t) = 0.$$

   (È RICHIESTO il procedimento - 12 p.)

   (b) Sia ora $f(t) = H(t)e^t$; si trovi la soluzione $y(t)$ con la condizione: (6p.)

$$y(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

   (c) Con la stessa condizione del punto precedente si trovi la soluzione per $f = \delta'$ (6p.).

5. (a) Si descrivano le distribuzioni u che risolvono l'equazione: (4 p.)

$$(t^3 - 1)u(t) = 1;$$

   (b) (*) si descrivano le distribuzioni u che risolvono l'equazione: (4 p.)

$$(e^{2t} - 1)u(t) = \delta;$$

   (c) Si calcoli la trasformata di Fourier di $u(t) := (1 + t)\sin(t)$ (4 p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

L.S. INGEGNERIA ENERGETICA/ELETTRICA/NUCLEARE
COMPITO DI COMPLEMENTI DI MATEMATICA - I^a PARTE - 18 LUGLIO 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

(1a) $\|f_n\|_\infty = \boxed{\frac{1}{2n}}$; **(1b)** $A = \boxed{[0,+\infty[}$; 2 1

(1c) s è continua per x $\in [0,+\infty[$, infatti:

Fissato $M>0$ si ha, per n abbastanza grande
$\|f_n\|_{\infty,[0,M]} = f_n(M) \simeq \frac{M^2}{n^2}$.
Dunque $\forall M>0$ la serie $\sum_n f_n$ conv. totalmente su $[0,M]$ $\Rightarrow$ la sua somma è continua su $[0,M]$. Dato che M è arbitrario $\Rightarrow$ s è continua in ogni $x \geq 0$.

3

(1d) (*) la serie converge uniformemente su $[0,+\infty[$ sì no, infatti:

Se conv. unif su $[0,+\infty[$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty} s(x)=0$. Ma dato m intero si ha:

$$s(\sqrt{m}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\sqrt{m}) \geq \sum_{n=1}^{m} f_n(\sqrt{m}) = \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{m^2+n^2}$$
$$\geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{2m^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{m} = \frac{1}{2},$$ da cui

$\lim_{m\to\infty} s(\sqrt{m}) \geq \frac{1}{2} \neq 0$ ASSURDO

4

(1e) le $f_n \in L^1([0,+\infty[)$ sì no ; la serie $\sum_n \frac{f_n}{\sqrt{n}}$ converge in $L^1(\mathbb{R})$ sì no ;

2

(1f) le $f_n \in L^2([0,+\infty[)$ ~~sì~~ no ; la serie $\sum_n \frac{f_n}{\sqrt{n}}$ converge in $L^2(\mathbb{R})$ ~~sì~~ no , infatti:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} f_n(x)^2\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(n^2+x^4)^2}\,dx = (x=\sqrt{n}\,y)$$

$$\sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{n^2 y^4}{(n^2+n^2y^4)^2}\,dy = \frac{1}{n^{3/2}}\int_0^{+\infty} \frac{y^4}{(1+y^4)^4}\,dy$$. Dunque

$$\left\|\frac{f_n}{\sqrt{n}}\right\|_2 = \frac{1}{n^{3/4}}\,\frac{1}{n^{1/2}}\,C = \frac{c}{n^{5/4}} \Rightarrow$$

$$\sum_n \left\|\frac{f_n}{\sqrt{n}}\right\|_2 < +\infty \Rightarrow$$ la serie conv. ass. in L^2

4

(2) integrale = $\frac{\pi}{32}\left(1-\frac{\cos(\sqrt{2})}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ (CALCOLI NELLE FACCIATE BIANCHE);

8

(3a) $\bar{\omega} = \pi$, $u_n = -\frac{2\alpha}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin(n\alpha\pi)$;

5

(3b) la serie converge uniformemente sì ~~no~~ ; infatti

Non può convergere uniformemente perché la funzione $f_\alpha(x)$ NON SI ANNULLA IN $x=1$ — se la conv. fosse uniforme la somma della serie sarebbe una funzione continua, nulla in $x=0$ e $x=1$.

3

(3c) l'equazione ha soluzione per α NESSUN α;

3

SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO **(1d)**

L.S. INGEGNERIA ENERGETICA/ELETTRICA/NUCLEARE
COMPITO DI COMPLEMENTI DI MATEMATICA - II^a PARTE - 18 LUGLIO 2011

voto

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	

12

(4a) La soluzione $y(t)$ è data da: (CALCOLI NELLA FACCIATA BIANCA)

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2t}}{10}\left(\cos(t) + 3\sin(t)\right) & \text{se } t > 0 \\ \dfrac{e^{t}}{10} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

6

(4b) La soluzione $y(t)$ è data da:

$$y(t) = \frac{H(t)}{10}\left(e^{t} - e^{-2t}\left(\cos(t) + 3\sin(t)\right)\right)$$

6

(4c) La soluzione $y(t)$ è data da:

$$y(t) = H(t)e^{-2t}\left(\cos(t) - 2\sin(t)\right)$$

(5a) Le soluzioni u sono date da:

$$u(t) = \frac{1}{3}(\mathrm{v.p})\frac{1}{t-1} - \frac{1}{3}\frac{t+2}{t^2+t+1} + c\,\delta(t-1)$$

$$c \in \mathbb{C}$$

4

(5b) Le soluzioni u sono date da:

$$u = -\frac{1}{2}\delta' + c\,\delta \qquad c \in \mathbb{C}$$

4

(5c) $\mathcal{F}((1+t)sin(t)(\omega) =$

$$\frac{1}{2i}\left(\delta(t-1) - \delta(t+1)\right) + \frac{1}{2}\left(\delta'(t-1) + \delta'(t+1)\right)$$

4

SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO **(4a)**

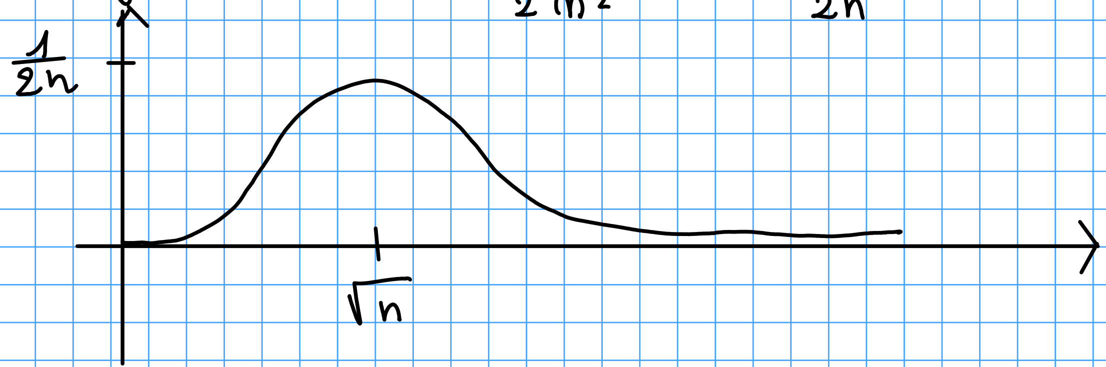
1) $$f_n(x) = \frac{x^2}{n^2+x^4}.$$ Tracciamo il grafico di f_n.

$f_n(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = 0$,

$$f_n'(x) = \frac{2x(n^2+x^4) - x^2\cdot 4x^3}{(n^2+x^4)^2} = \frac{2x(n^2-x^4)}{(n^2+x^4)^2}.$$ Allora

$f_n'(x)=0 \iff x=0$ oppure $x=\sqrt{n}$. Si ha.

$$f_n(\sqrt{n}) = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}.$$ Il grafico è allora:



e quindi:

(a) $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$

(b) La serie $\sum_n f_n(x)$ converge per ogni $x\geq 0$, dato che

$$f_n(x) \leq \frac{x^2}{n^2} \quad \left(\text{e } \sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty\right)$$

(c) VEDI SOPRA

(d) VEDI SOPRA

(e) Calcoliamo $\left\| \frac{f_n}{\sqrt{n}} \right\|_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{n^2+x^4}\, dx = \left(x = \sqrt{n}\, y \Rightarrow dx = \sqrt{n} \right)$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{n\, y^2}{n^2 + n^2 y^4} \sqrt{n}\, dy = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4}\, dy .$$

Questo calcolo si può fare perché $f_n(x) \simeq \frac{1}{x^2}$ all'infinito e dunque $f_n \in L^1([0,+\infty[)$ $\forall n$ e mostra che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{f_n}{\sqrt{n}} \right\|_1 = +\infty$$ (QUINDI NON CONV. ASSOLUTAMENTE IN L^1).

Peraltro, dallo stesso calcolo, si deduce che la serie $\sum_n \frac{f_n}{\sqrt{n}}$ NON CONV. IN L^1 — se lo facesse sarebbe:

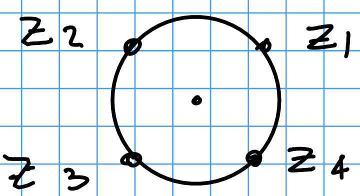
$$\int_0^{+\infty} \sum_n \frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\, dx = \sum_n \int_0^{+\infty} \frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\, dx \underset{\uparrow}{=} \sum_n \frac{1}{n} \int^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4}\, dy = +\infty$$ ASSURDO

NOTA CHE $f_n \geq 0$ $\forall n$

(f) VEDI SOPRA

2) Calcoliamo prima di tutto $(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(16+x^4)} = (\mathrm{I})$. Per quanto visto

Il denominatore ha radici $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\, i$ e zero, tutte semplici



e per quanto visto a lezione, posto

$$f(z) := \frac{e^{zi}}{z(16+z^4)}$$

$$(I) = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f(z), z_1) + \mathrm{Res}(f(z), z_2)\right) + \pi i \,\mathrm{Res}(f, 0) =$$

$$2\pi i \left(\frac{e^{zi}}{(16+z^4)+4z^4}\Big|_{z=z_1} + \frac{e^{zi}}{(16+z^4)+4z^4}\Big|_{z=z_2} \right) +$$

$$\pi i \frac{e^{zi}}{(16+z^4)+4z^4}\Big|_{z=0} =$$

$$2\pi i \left(\frac{e^{iz_1}}{4z_1^4} + \frac{e^{iz_2}}{4z_2^4} \right) + \pi i \frac{1}{16} = 2\pi i \left(\frac{e^{z_2}}{4(-16)} + \frac{e^{\bar{z}_2}}{4(-16)} \right) + \frac{\pi i}{16}$$

$$= -\frac{\pi i}{16} e^{-\sqrt{2}} \frac{e^{\sqrt{2}i} + e^{-\sqrt{2}i}}{2} + \frac{\pi i}{16} = -\frac{\pi}{16} e^{-\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2})\, i + \frac{\pi}{16} i$$

Prendendo la parte immaginaria:

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(16+x^4)}\,dx = \frac{\pi}{16} e^{-\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{16}$$

(E (v.p.) si può togliere dato che $\frac{\sin(x)}{x}$ è continua in zero)

Dato che la funzione integranda è pari, l'integrale su $[0, +\infty[$ è la metà

3) (a) Dato che $L = 1 \Rightarrow \bar{\omega} = \frac{\pi}{L} = \pi$. Applicando le formule

$$u_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_a(x)\sin(\bar{\omega} n x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^1 f_a(x)\sin(n\pi x)\,dx = 2\int_0^{a} x \sin(n\pi x)\,dx +$$

$$+ \quad 2\int_\alpha^1 \alpha \sin(n\pi x)\,dx = 2\left[\frac{x\left(-\cos(n\pi x)\right)}{n\pi}\right]_0^\alpha + \frac{2}{n\pi}\int_0^\alpha \cos(n\pi x)\,dx$$

$$+ \quad 2\left[\frac{\alpha\left(-\cos(n\pi x)\right)}{n\pi}\right]_\alpha^1 = \cancel{\frac{-2\alpha\cos(n\pi\alpha)}{n\pi}} + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^\alpha +$$

$$2\alpha\,\cancel{\frac{\cos(n\pi\alpha)}{n\pi}} - \frac{2\alpha\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2}{n^2\pi^2}\sin(n\alpha\pi) - \frac{2\alpha}{n\pi}(-1)^n$$

VOLENDO SI POTREBBE RAGIONARE COSÌ: $f_\alpha'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le \alpha \\ 0 & \text{se } \alpha \le x \le 1 \end{cases}$

e allora

$$u_n = 2\int_0^1 f_\alpha(x)\sin(n\pi x)\,dx = 2\left[f_\alpha(x)\frac{\left(-\cos(n\pi x)\right)}{n\pi}\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 f_\alpha'(x)\cos(n\pi x)\,dx$$

$$= \left(f_\alpha(0)=0\right) = \frac{-2}{n\pi}f_\alpha(1)\cos(n\pi) + \frac{2}{n\pi}\int_0^\alpha \cos(n\pi x)\,dx =$$

$$-\frac{2\alpha}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^\alpha = -\frac{2\alpha}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin(n\alpha\pi)$$

(b) VEDI SOPRA

(c) Per la teoria svolta a lezione l'eq. diff (con condizioni nulle al bordo) ha sol. $\Longleftrightarrow$ $u_3 = 0$ (dato che $n=3$ rende nulla l'espressione $-n^2\pi + 9\pi$)

Questo significa $\frac{2\alpha}{3\pi} + \frac{2}{9\pi^2}\sin(3\alpha\pi) = 0 \iff$

$$\sin(3\alpha\pi) = -3\alpha\pi$$

Ma è ben noto che $-t < \sin(t) < t$ per ogni $t \neq 0$

e quindi NESSUN $\alpha \neq 0$ rende risolubile l'equazione.

4)

$$y'' + 4y' + 5y = f$$

(a) $f(t) = H(-t)\,e^t$. Calcoliamo la trasf. di Fourier di f.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^t e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}\,dt = \left[\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{1-i\omega} = \frac{i}{\omega+i}$$

Data la condizione all'infinito, risolviamo mediante Fourier:

$$(-\omega^2 + 4i\omega + 5)\,\hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega) \iff$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{i}{(-\omega^2+4i\omega+5)(\omega+i)} = \frac{-i}{(\omega^2-4i\omega-5)(\omega+i)}$$

Posto $g(z) := \dfrac{-i\, e^{itz}}{(z^2-4iz-5)(z+i)}$ si ha che g ha tre

poli semplici $z_1 = -i$, $z_{2,3} = 2i \pm 1$. Si ha

$$\mathrm{Res}(g, -i) = \frac{-i\, e^{itz}}{(2z-4i)(z+i)+(z^2-4iz-5)}\Bigg|_{z=-i} = \frac{-i e^{t}}{-1-4-5} = \frac{i e^{t}}{10}$$

$$\mathrm{Res}(g, 2i+1) = \frac{-i\, e^{itz}}{(2z-4i)(z+i)+(z^2-4iz-5)}\Bigg|_{z=2i+1} = \frac{-i\, e^{(-2+i)t}}{2(3i+1)} =$$

$$-\frac{i}{20}(1-3i)e^{-2t}e^{it}$$

$$\mathrm{Res}(g, 2i-1) = \frac{-i\, e^{itz}}{(2z-4i)(z+i)+(z^2-4iz-5)}\Bigg|_{z=2i-1} = \frac{-i\, e^{(-2-it)}}{(-2)(3i-1)} =$$

$$-\frac{i}{20}(1+3i)e^{-2t}e^{it}$$

NE SEGUE, USANDO LE FORMULE VISTE A LEZIONE, che

PER $t>0$

$$y(t) = i\Big(\mathrm{Res}(g, 2i+1) + \mathrm{Res}(g, 2i-1)\Big) = \frac{1}{20}e^{-2t}\Big((1-3i)e^{it} + (1+3i)e^{-it}\Big) =$$

$$= \frac{1}{10} e^{-2t} \operatorname{Re}\left((1-3i) e^{it} \right) = \frac{e^{-2t}}{10} \left(\cos(t) + 3 \sin(t) \right)$$

mentre per $t < 0$

$$y(t) = (-i) \operatorname{Res}(g, -i) = \frac{e^{t}}{10}$$

(b) Data la condizione nulla prima di zero usiamo Laplace.

Prima di tutto se $f(t) = H(t) e^{t} \Rightarrow$

$$\check{f}(z) = \int_0^{+\infty} e^{t} e^{-zt} \, dt = \int_0^{+\infty} e^{(1-z)t} \, dt = \left. \frac{e^{(1-z)t}}{1-z} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{z-1}$$

Trasformando con Laplace l'equazione si arriva a:

$$(z^2 + 4z + 5)\, \check{y}(z) = \frac{1}{z-1} \iff \check{y}(z) = \frac{1}{(z^2+4z+5)(z-1)}$$

Poniamo $g(z) := \dfrac{e^{zt}}{(z^2+4z+5)(z-1)}$. La g ha 3 poli semplici

in $z = 1$ e $z = -2 \pm i$. Si ha:

$$\operatorname{Res}(g, 1) = \left. \frac{e^{zt}}{(2z+4)(z-1) + (z^2+4z+5)} \right|_{z=1} = \frac{e^{t}}{10}$$

$$\mathrm{Res}(g, -2+i) = \frac{e^{zt}}{(2z+4)(z-1)+(z^2+4z+5)}\Bigg|_{z=-2+i} = \frac{e^{(-2+i)t}}{2i\,(-3+i)} = \frac{(-1+3i)\,e^{-2t}e^{it}}{20}$$

$$\mathrm{Res}(g, -2-i) = \overline{\mathrm{Res}(g, -2+i)}$$

DUNQUE, se $t>0$

$$y(t) = \sum \text{residui} = \frac{e^{t}}{10} + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{(-1+3i)}{20}\,e^{-2t}e^{it}\right) = \frac{e^{t}}{10} - \frac{e^{-2t}}{10}\left(\cos(t)+3\sin(t)\right)$$

(c) Usiamo sempre Laplace. Dato che $\mathcal{L}(\delta')(z) = z$, si arriva a

$$\check{y}(z) = \frac{z}{z^2+4z+1}.$$

Posto $g(z) = \dfrac{z e^{zt}}{z^2+4z+1}$ si ha

$$\mathrm{Res}(g, -2+i) = \frac{z e^{zt}}{2z+4}\Bigg|_{z=-2+i} = \frac{(-2+i)\,e^{(-2+i)t}}{2i} = \frac{(1+2i)\,e^{-2t}e^{it}}{2}$$

(e l'altro è il coniugato). DUNQUE, se $t>0$

$$y(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{(1+2i)}{2}\,e^{-2t}e^{it}\right) = e^{-2t}\left(\cos(t) - 2\sin(t)\right)$$

(5) (a) $(t^3-1)u = 1$

Notiamo che $(t^3-1) = (t-1)(t^2+t+1)$ e che t^2+t+1 è sempre >0.

Una sol. possibile è $u = \frac{1}{t^3-1}$, che va inteso come

$$u = (v.p.)\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{t-1} - \frac{1}{3}\,\frac{t+2}{t^2+t+1}$$

(ottenuta mediante la scomposizione in fratti semplici)

Da quanto detto sopra segue anche che l'omogenea: $(t^3-1)u_0 = 0 \iff$

$$(t-1)(t^2+t+1)u_0 = 0 \iff (t-1)u_0 = 0 \iff u_0 = c\,\delta(t-1) \quad \text{per } c \in \mathbb{C}$$

IN DEFINITIVA

$$u = \frac{1}{t^3-1} + c\,\delta(t-1) = (v.p.)\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{t-1} - \frac{1}{3}\,\frac{t+2}{t^2+t+1} + c\,\delta(t-1)$$

(b) Cerchiamo una sol. particolare del tipo $c\,\delta'$. Dato che

$$(e^{2t}-1)\,\delta' = \underbrace{(e^{2t}-1)\big|_{t=0}}_{=0}\,\delta' - (e^{2t}-1)'\big|_{t=0}\,\delta = -2\,\delta$$

si può scegliere $c = -1/2$

Dato poi che le sol. dell'omogenea $(e^{2t}-1)u=0$

sono date da $c\,\delta$ $\quad c \in \mathbb{C}$ (zero è radice semplice di $e^{2t}-1=0$)

la sol. generale è

$$u = -\frac{1}{2}\delta' + c\,\delta \qquad c \in \mathbb{C}$$

(c) se $v(t) = \sin(t) = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \Rightarrow$

$$\hat{v}(t) = \frac{1}{2i}\Big(\delta(t-1) - \delta(t+1)\Big)$$

Dato che $u(t) = (1+t)v(t) \Rightarrow$

$$\hat{u}(\omega) = \hat{v}(\omega) + \widehat{tv(t)}(\omega) = \hat{v}(\omega) + i\frac{d}{d\omega}\hat{v}(\omega) =$$

$$\frac{1}{2i}\Big(\delta(t-1) - \delta(t+1)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\delta'(t-1) - \delta'(t+1)\Big)$$