L.S. in Ingegneria Energetica/Elettrica/Nucleare. Corso di Complementi di Matematica.
Compito del 4 luglio 2011 - prima parte.

Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti negli appositi spazi del foglio risposte, aggiungendo una breve motivazione quando richiesta.

1. Sia data la successione di funzioni definite su $[0, +\infty[$ da $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2x^3+1}$.
   (a) Calcolare la norma uniforme di ogni f_n (2 punti);
   (b) individuare l'insieme A delle $x \geq 0$ per cui $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (1 punti);
   (c) dire per quali x di A la somma della serie $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è continua in x (motivando - 3 punti);
   (d) (*) dire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$ (motivando - 4 punti);
   (e) dire se le f_n sono in $L^1([0, +\infty[)$ e in caso affermativo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge in $L^1([0, +\infty[)$ (motivando - 4 punti);
   (f) dire se le f_n sono in $L^2([0, +\infty[)$ e in caso affermativo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente rispetto alla norma di $L^2([0, +\infty[)$ (2 punti).

2. Si calcoli l'integrale (È RICHIESTO il procedimento - 8 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{16 + x^4}\, dx$$

3. Si consideri la seguente funzione, dipendente dal parametro $\alpha > 0$, definita da

$$f_\alpha(t) := \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \alpha, \\ \alpha \dfrac{1-t}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \leq t \leq 1. \end{cases}$$

   (a) Si scrivano sul foglio risposte i parametri dello sviluppo di f_α in serie di soli seni $\sum_{n\geq 1} u_n \sin(n\bar{\omega}t)$ in $[0, 1]$ (naturalmente la risposta dipende da α); (1+4 punti);
   (b) si dica se la serie detta sopra converge uniformemente a f_α (motivando - 3 punti);
   (c) si usi quanto trovato sopra per dire per quali $\alpha \in]0, 1[$ l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'' + 4\pi^2 y = f_\alpha(t) & \text{per } 0 < t < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

   ha soluzione (4 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

L.S. in Ingegneria Energetica/Elettrica/Nucleare. Corso di Complementi di Matematica.
Compito del 20 giugno 2011 - Seconda parte.

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 5y = f$$

   (a) Sia $f(t) = H(t)e^{-t}$, dove $H(t) = 1$ per $t > 0$ e $H(t) = 0$ per $t < 0$; si trovi la soluzione $y(t)$ con la condizione

   $$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} y'(t) = 0.$$

   (È RICHIESTO il procedimento - 12 p.)

   (b) Per la stessa f del punto precedente si trovi la soluzione $y(t)$ con la condizione: (6p.)

   $$y(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

   (c) Con la stessa condizione del punto precedente si trovi la soluzione per $f = \delta'$ (6p.).

5. (a) Si descrivano le distribuzioni u che risolvono l'equazione: (4 p.)

   $$(e^{t^2} - 1)u(t) = 0;$$

   (b) (*) si descrivano le distribuzioni u che risolvono l'equazione: (4 p.)

   $$t(1 - t)u(t) = \delta;$$

   (c) Si calcoli la trasformata di Fourier di $u(t) := \sin(|t|) = \operatorname{sgn}(t)\sin(t)$ - chiaramente nel senso delle distribuzioni dato che u non è né in $L^1(\mathbb{R})$ né in $L^2(\mathbb{R})$ (suggerimento: scrivere $\sin(t)$ come $\dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$) (4 p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

L.S. INGEGNERIA ENERGETICA/ELETTRICA/NUCLEARE
COMPITO DI COMPLEMENTI DI MATEMATICA - I^a PARTE - 4 LUGLIO 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

(1a) $\|f_n\|_\infty = \boxed{\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3} n^{-\frac{2}{3}}}$; **(1b)** $A = \boxed{[0,+\infty[}$;

(1c) s è continua per x $x > 0$, infatti:

Fissato $\varepsilon > 0$ si ha che il $\max_{x \geq \varepsilon} |f_n(x)|$ è ottenuto in $x = \varepsilon$, almeno se n è abbastanza grande. Dunque

$$\sum_n \|f_n\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} = \sum_n f_n(\varepsilon) = \sum_n \frac{\varepsilon}{n^2\varepsilon^3+1} < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie conv. unif. su $[\varepsilon,+\infty[$ $\Rightarrow$ s è continua su $[\varepsilon,+\infty[$ $\forall \varepsilon > 0$.

(1d) (*) la serie converge uniformemente su $[0,+\infty[$ sì ~~no~~, infatti:

s non è continua in zero $\Rightarrow$ la serie non conv. unif su $[0,+\infty[$. Per vederlo fisso m intero:

$$s(1/m^{2/3}) \geq \sum_{n=1}^{m} f_n(1/m^{2/3}) = \sum_{n=1}^{m} \frac{m^{-2/3}}{\left(\frac{n}{m}\right)^2+1}$$

$$\geq \frac{1}{m^{2/3}} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2} = \frac{m^{1/3}}{2}.$$ DUNQUE

$$\lim_{m\to\infty} s(1/m^{2/3}) = +\infty \quad \left(\text{mentre } \frac{1}{m^{2/3}} \to 0\right)$$

(1e) le f_n sono in $L^1([0,+\infty[)$ ~~sì~~ no ; la serie delle f_n converge in $L^1(\mathbb{R})$ ~~sì~~ no ,
infatti:

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(n^2x^3+1)}\,dx = \left(n^2x^3 = y^3 \Rightarrow dx = \frac{dy}{n^{2/3}}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^{-2/3}\, y\, n^{-2/3}\, dy}{y^3+1} = \frac{1}{n^{4/3}} \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^3}\,dy$$

$\Rightarrow \sum \|f_n\|_1 < +\infty$ $(4/3 > 1)$ $\Rightarrow$ la serie converge in L^1

(1f) le f_n sono in $L^2([0,+\infty[)$ [X] sì [ ] no ; la serie delle f_n conv. ass. in $L^2(\mathbb{R})$ [ ] sì [X] no

(2) integrale = $\boxed{\dfrac{\pi}{8}\,\dfrac{\sin(\sqrt{2})}{e^{\sqrt{2}}}}$ (CALCOLI NELLE FACCIATE BIANCHE);

(3a) $\bar{\omega} = \boxed{\pi}$, $u_n = \boxed{\dfrac{2\sin(n\alpha\pi)}{(1-\alpha)\pi^2 n^2}}$;

(3b) la serie converge uniformemente [X] sì [ ] no ; infatti

Dato che i coeff. dello sviluppo in serie sono

$u_n \simeq \dfrac{cost}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ la serie conv. <u>unif.</u> alla funzione

(3c) l'equazione ha soluzione per α $\boxed{\alpha = 1/2}$;

SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO **(1d)**

L.S. INGEGNERIA ENERGETICA/ELETTRICA/NUCLEARE
COMPITO DI COMPLEMENTI DI MATEMATICA - II^a PARTE - 4 LUGLIO 2011

voto

Cognome:

Nome:

Matricola:

(4a) La soluzione $y(t)$ è data da: (CALCOLI NELLA FACCIATA BIANCA)

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}}{10} & \text{per } t>0 \\ \dfrac{e^{2t}}{10}\left(\cos(t) - 3\sin(t)\right) & \text{per } t<0 \end{cases}$$

(4b) La soluzione $y(t)$ è data da:

$$y(t) = H(t)\left(\frac{e^{-t}}{10} - \frac{e^{2t}}{10}\left(\cos(t) - 3\sin(t)\right)\right)$$

(4c) La soluzione $y(t)$ è data da:

$$y(t) = H(t)e^{2t}\left(\cos(t) + 2\sin(t)\right)$$

(5a) Le soluzioni u sono date da:

$$u(t) = \alpha\,\delta(t) + \beta\,\delta'(t)$$

per α, β costanti arbitrarie

(5c) ~~**(5b)**~~ Le soluzioni u sono date da:

$$u(t) = -\delta'(t) + \alpha\,\delta(t) + \beta\,\delta(t-1)$$

(5b) $\mathcal{F}(sin(|t|))(\omega) =$

$$\boxed{\frac{-2}{\omega^2 - 1}}$$

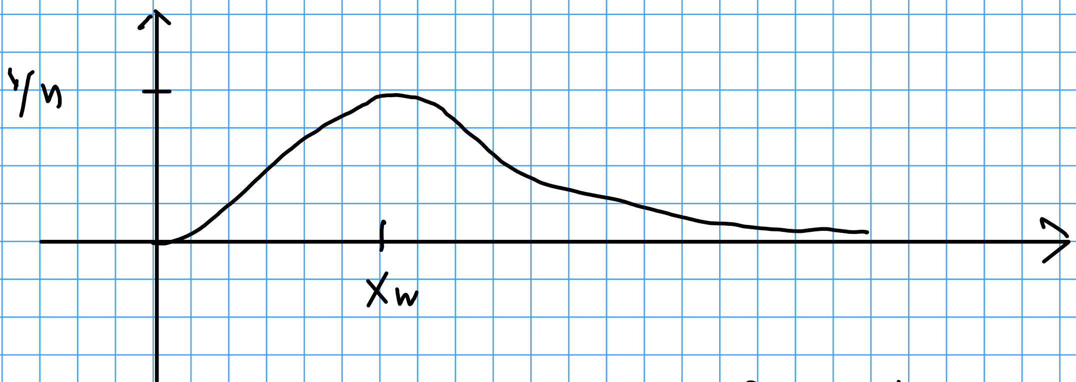
SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO **(4a)**

1) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2x^3+1}$ per $0 \le x < +\infty$. È chiaro che $f_n(0)$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Si ha $f_n'(x) = \dfrac{n^2x^3+1 - x\, n^2 3x^2}{(n^2x^3+1)^2} = \dfrac{1-2n^2x^3}{(n^2x^3+1)^2}$ e quindi

$f_n'(x)=0 \iff x=0$ o $x = x_n$ dove

$x_n := \dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^2}}$. Inoltre $f_n(x_n) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^2}}\,\dfrac{2}{3} = \dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{3}\, n^{-2/3} =: y_n$



(a) Da quanto sopra segue che $\|f_n\|_\infty = y_n = \dfrac{2^{\frac23}}{3}\, n^{-\frac23}$

(b) Se $x>0$ è fissato, allora $f_n(x) \simeq \dfrac{1}{x^2n^2}$ e quindi $\sum_1^\infty f_n(x) < +\infty$

(notare che $f_n(x)>0$). Se $x=0$ è ovvio che la serie conv. Dunque $A=[0,+\infty[$

(c) Dato che $\sum_1^\infty \|f_n\|_\infty = c\sum_1^\infty \dfrac{1}{n^{2/3}} = +\infty$ $\left(\frac23<1\right)$ non si può ragionare su tutto $[0,+\infty[$. Si fissi allora $\varepsilon>0$ e si nota che per n grande $x_n<\varepsilon$ per cui $\sum_1^\infty \|f_n\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} = \sum_1^\infty f_n(\varepsilon) < +\infty$ (perché $f_n(\varepsilon)\simeq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}$). Dunque c'è la conv. totale su $[\varepsilon, +\infty[$ $\Rightarrow$ conv. unif su $[\varepsilon, +\infty[$ $\Rightarrow$ la serie è continua su $[\varepsilon, +\infty[$ $\Rightarrow$ la serie è continua su $]0, +\infty[$, perché $\varepsilon > 0$ è arbitrario.

(d) Se la serie convergesse unif su $[0, +\infty[$ allora $\lim_{x \to 0^+} \sum_1^\infty f_n(x) = 0$. Ma se m è intero:

$$\sum_1^\infty f_n\left(\frac{1}{m^{2/3}}\right) = \sum_1^\infty \frac{m^{-2/3}}{\left(\frac{n}{m}\right)^2 + 1} \geq \sum_1^m \frac{m^{-2/3}}{2} = \frac{m^{1/3}}{2} \to \infty \text{ se } m \to +\infty$$

ASSURDO

(e) Le f_n SONO IN L_1, dato che $f_n(x) \simeq \frac{1}{n^2 x^2}$ (rispetto a $x \to \infty$).

Inoltre $\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{n^2 x^3 + 1}\, dx = \left(n^2 x^3 = y^3 \iff x = y\, n^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow dx = dy\, n^{-\frac{2}{3}} \right)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^{-\frac{2}{3}}\, y\, n^{-\frac{2}{3}}\, dy}{1 + y^3} = \frac{1}{n^{4/3}} \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^3}\, dy .$$ Dato che $\frac{4}{3} > 1$

$\sum_1^\infty \|f_n\|_1 < +\infty \Rightarrow$ la serie $\sum f_n$ converge in L^1

(f) Le f_n SONO IN L_2, dato che $f_n^2(x) \simeq \frac{1}{n^4 x^4}$. Inoltre

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(n^2 x^3 + 1)^2}\, dx = \left(x = n^{-\frac{2}{3}} y \right) = \int_0^{+\infty} \frac{n^{-\frac{4}{3}}\, y^2\, n^{-\frac{2}{3}}\, dy}{(1+y^3)^2} =$$

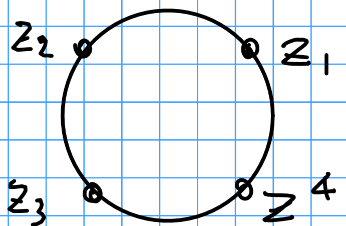
$\frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^3)^2}\, dy$. Dunque $\|f_n\|_2 = \frac{1}{n}$ costante $\to \sum_1^\infty \|f_n\|_2 = +\infty$

(non conv. assolutamente in L^2)

(2) Calcoliamo prima

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, e^{ix}}{16+x^4}\, dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) \right) = (\ast)$$

dove $f(z) = \dfrac{z\, e^{iz}}{16+z^4}$ e $z_1 - z_4$ sono le radici quarte di -16, cioè



$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i \qquad z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i \qquad (z_3 = \overline{z_2},\ z_4 = \overline{z_1})$. Allora

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \left.\frac{z\, e^{iz}}{4z^3}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{z^2 e^{iz}}{4z^4}\right|_{z=z_1} = -\frac{1}{64} z^2 e^{iz}\Big|_{z=z_1} = -\frac{4i}{64} e^{iz_1} = -\frac{i\, e^{z_2}}{16}$$

e analogamente

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = -\frac{1}{64} z_2^2 e^{iz_2} = \frac{4i}{64} e^{z_3} = \frac{i}{16} e^{\overline{z_2}}. \quad \text{DUNQUE}$$

$$(\ast) = \frac{2\pi i \cdot i}{16} \cdot \left(-e^{z_2} + e^{\overline{z_2}} \right) = \frac{\pi}{8} \cdot 2i \operatorname{Im}\left(-e^{z_2}\right) = \frac{\pi i}{4} e^{-\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2})$$

ALLORA

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)\, dx}{16+x^4}\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left((\ast)\right) = \boxed{\frac{\pi}{8} \frac{\sin(\sqrt{2})}{e^{\sqrt{2}}}}$$

(3) Conviene notare che $f_\alpha'(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<\alpha \\ -\frac{\alpha}{1-\alpha} & \alpha<t<1 \end{cases}$

e che, essendo f continua, tale derivata è la derivata nel senso L^1. Allora

(a) $\bar{\omega} = \frac{\pi}{T} = \boxed{\pi}$ e per quanto riguarda i coefficienti: $(T=1)$

$$u_n = \frac{2}{T}\int_0^T f_\alpha(t)\sin(n\bar{\omega}t)\,dt = 2\int_0^1 f_\alpha(t)\sin(n\pi t)\,dt = \text{(per parti)}$$

$$2\underbrace{\left[f_\alpha(t)\frac{\cos(n\pi t)}{-n\pi}\right]_0^1}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ perché } f_\alpha(0)=f_\alpha(1)=0}} + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 f_\alpha'(t)\cos(n\pi t)\,dt =$$

$$\frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^\alpha - \frac{2}{n\pi}\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_\alpha^1 = \frac{2}{n^2\pi^2}\sin(n\pi\alpha)\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2\sin(n\alpha\pi)}{(1-\alpha)\pi^2 n^2}}$$

(b) Dato che $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| < +\infty$ $\left(\text{perché } u_n \simeq \frac{c}{n^2}\right)$ si ha che la serie converge uniformemente a f

(c) Come visto a lezione per trovare la soluzione $y(t)$ devono essere risolubili le (infinite) equazioni

$$(-n^2\pi^2 + 4\pi^2)\,y_n = u_n$$

Tali equazioni sono sicuramente risolubili se $n \neq 2$. Per poter risolvere per $n=2$ è necessario e sufficiente che $u_2 = 0$. Visto l'espressione degli u_n tale condizione diventa $\sin(2\alpha\pi) = 0 \iff 2\alpha\pi$ multiplo di π.

Ma essendo $0<\alpha<1$ l'unico α possibile è $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$

(4)

$$y'' - 4y' + 5y = f$$

(a) $f(t) = H(t)\, e^{-t} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t}\, dt = \left[\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+i\omega} = \frac{-i}{\omega - i}$

Trasformando con Fourier l'equazione:

$$(-\omega^2 - 4i\omega + 5)\,\hat{y}(\omega) = \frac{-i}{\omega - i} \iff \hat{y}(\omega) = \frac{i}{(\omega^2 + 4i\omega - 5)(\omega - i)}$$

Le radici del denominatore sono $\omega = i$, $\omega = \pm 1 - 2i$ (semplici).

Posto $g(z) := \dfrac{i\, e^{izt}}{(z^2 + 4iz - 5)(z - i)}$ si ha

$$\mathrm{Res}(g, i) = \left. \frac{i\, e^{izt}}{(2z + 4i)(z - i) + (z^2 + 4iz - 5)} \right|_{z=i} = \frac{i\, e^{-t}}{-1 - 4 - 5} = -\frac{i\, e^{-t}}{10}$$

$$\mathrm{Res}(g, 1-2i) = \left. \frac{i\, e^{izt}}{(2z + 4i)(z - i) + (z^2 + 4iz - 5)} \right|_{z=1-2i} = \frac{i\, e^{2t}\, e^{it}}{2(1 - 3i)} =$$

$$\frac{i\,(1+3i)\,e^{2t}\,e^{it}}{20}$$

$$\operatorname{Res}(g,-1-2i)=\left.\frac{i\,e^{izt}}{(2z+4i)(z-i)+(z^2+4iz-5)}\right|_{z=-1-2i}=\frac{i\,e^{2t}\,e^{-it}}{(-2)(-1-3i)}=$$

$$\frac{i(1-3i)\,e^{2t}\,e^{it}}{20}$$

Ne segue (usando le formule viste nel corso) che

per $t>0$ $\quad y(t)=i\operatorname{Res}(g,i)=\boxed{\dfrac{e^{-t}}{10}}$

per $t<0$ $\quad y(t)=(-i)\left(\operatorname{Res}(g,1-2i)+\operatorname{Res}(g,-1-2i)\right)=$

$$\frac{e^{2t}}{20}\left((1+3i)e^{it}+(1-3i)e^{-it}\right)=\frac{e^{2t}}{10}\operatorname{Re}\left((1+3i)e^{it}\right)=$$

$$\boxed{\frac{e^{2t}}{10}\left(\cos(t)-3\sin(t)\right)}$$

(b) Per risolvere con la condizione nulla prima di zero usiamo Laplace:

intanto $\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}(H(t)e^{-t})(z)=\int_0^{+\infty}e^{-(1+z)t}\,dt=\dfrac{1}{z+1}$ (per $\operatorname{Re} z>-1$)

Trasformando secondo Laplace l'equazione: $(\mathcal{L}(y)=\check{y})$

$$(z^2-4z+5)\check{y}(z)=\frac{1}{z+1} \Leftrightarrow \check{y}(z)=\frac{1}{(z^2-4z+5)(z+1)}$$

Se $g(z):=\dfrac{e^{zt}}{(z^2-4z+5)(z+1)}$ (che ha poli $z=-1$, $z=2\pm i$, SEMPLICI)

$$\text{Res}(g,-1)=\left.\frac{e^{zt}}{(2z-4)(z+1)+(z^2-4z+5)}\right|_{z=-1}=\frac{e^{-t}}{10}$$

$$\text{Res}(g,2+i)=\left.\frac{e^{zt}}{(2z-4)(z+1)+(z^2-4z+5)}\right|_{z=2+i}=\frac{e^{2t}e^{it}}{2i(3+i)}=$$

$$=\frac{e^{2t}e^{it}}{20}(-1-3i)$$

$$\text{Res}(g,2-i)=\frac{e^{2t}e^{-it}}{20}(-1+3i)$$ (coniugato del precedente). DUNQUE

se $t>0$ $\quad y(t)=$ SOMMA DI TUTTI I RESIDUI $=$

$$\frac{e^{-t}}{10}+\frac{e^{2t}}{10}\text{Re}\left(e^{it}(-1-3i)\right)=\boxed{\frac{e^{-t}}{10}-\frac{e^{2t}}{10}(\cos(t)-3\sin(t))}$$

(e $y(t)=0$ per $t<0$)

(c) Usiamo ancora Laplace. Dato che $\mathcal{L}(\delta')=z\mathcal{L}(\delta)=z$, si ha

$$(z^2-4z+5)\check{y}(z)=z \Leftrightarrow \check{y}(z)=\frac{z}{z^2-4z+5}.$$ Posto $g(z):=\dfrac{z\,e^{zt}}{z^2-4z+5}$

(i poli - come visto prima - sono $2\pm i$)

$$\operatorname{Res}(g, 2+i) = \frac{z e^{zt}}{2z-4}\Big|_{z=2+i} = \frac{(2+i)e^{2t}e^{it}}{2i} = \frac{(1-2i)e^{it}e^{2t}}{2}$$

(e l'altro residuo è il coniugato). $\Longrightarrow$

se $t>0$ $\quad y(t) = e^{2t}\operatorname{Re}\left((1-2i)e^{it}\right) = \boxed{e^{2t}(\cos(t)+2\sin(t))}$

(5) (a) La funzione $\psi(t) = e^{t^2}-1$ ha come unico zero $t=0$. Dato che $\psi'(t) = 2te^{t^2} \Rightarrow \psi'(0)=0$ e $\psi''(t) = 2e^{t^2}+4t^2e^{t^2} \Rightarrow \psi''(0)\neq 0$ $\quad t=0$ è uno zero di molteplicità 2. Dunque

$$(e^{t^2}-1)u(t)=0 \iff u(t) = \boxed{\alpha\,\delta(t)+\beta\,\delta'(t)} \quad \text{per } \alpha,\beta \text{ arbitrarie}$$

(b) Si ha $u(t) = \operatorname{sgn}(t)\sin(t) = \operatorname{sgn}(t)\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \dfrac{\operatorname{sgn}(t)}{2i}e^{it} - \dfrac{\operatorname{sgn}(t)}{2i}e^{-it}$.

Ricordando che la trasformata di $v(t) = \operatorname{sgn}(t)$ è:

$$\hat{v}(\omega) = -\frac{2i}{\omega} \qquad \left(\text{con } \frac{1}{\omega} \text{ intendo } v.p.\frac{1}{\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{\operatorname{sgn}(t)}{2i}e^{it}\right)(\omega) = \frac{1}{2i}\mathcal{F}\left(v(t)e^{it}\right)(\omega) = \frac{1}{2i}\hat{v}(\omega-1) = \frac{-1}{\omega-1}$$

e analogamente $\mathcal{F}\left(\dfrac{\operatorname{sgn}(t)}{2i}e^{-it}\right) = \dfrac{-1}{\omega+1} \Rightarrow \mathcal{F}(\operatorname{sgn}(t)\sin(t)) = \boxed{\dfrac{-2}{\omega^2-1}}$

(c) (I) $t(1-t)u = \delta$. Se fosse

(II) $t(1-t)u_0 = 0 \Rightarrow u_0(t) = \alpha\delta(t) + \beta\delta(t-1)$

Cerchiamo una u del tipo $c\,\delta'$ che risolva l'eq. iniziale. Dato che

$$\underbrace{t(1-t)}_{\psi(t)}\delta' = \psi\,\delta' = \underbrace{\psi(0)}_{=0}\delta' - \underbrace{\psi'(0)}_{=1}\delta = -\delta$$

allora si può prendere $c = -1$, cioè $u = -\delta'$.

È chiaro che l'insieme di tutte le soluzioni di (I) si ottiene aggiungendo a quella trovata tutte le sol. dell'omogenea II. In definitiva

$$\boxed{u(t) = -\delta'(t) + \alpha\,\delta(t) + \beta\,\delta(t-1)}$$