

Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti negli appositi spazi del foglio risposte, aggiungendo una breve motivazione quando richiesta.

1. Sia data la successione di funzioni definite su  $[0, +\infty[$  da  $f_n(x) = \frac{x^2}{n^2 + x^3}$ .
- (a) Calcolare la norma uniforme di ogni  $f_n$  (2 punti);
  - (b) individuare l'insieme  $A$  delle  $x \geq 0$  per cui  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge (1 punto);
  - (c) dire per quali  $x$  di  $A$  la somma della serie  $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  è continua in  $x$  (motivando - 3 punti);
  - (d) (\*) dire se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente su  $[0, +\infty[$  (motivando - 4 punti);
  - (e) dire se le  $f_n$  sono in  $L^1([0, +\infty[)$  e in caso affermativo se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge in  $L^1([0, +\infty[)$  (2 punti);
  - (f) dire se le  $f_n$  sono in  $L^2([0, +\infty[)$  e in caso affermativo se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge assolutamente rispetto alla norma di  $L^2([0, +\infty[)$  (4 punti).
2. Si calcoli l'integrale (È RICHIESTO il procedimento - 8 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4} dx$$

3. Data la funzione definita da  $f(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ -1 & \text{se } 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$  ed estesa a tutto  $\mathbb{R}$  in modo da essere 2-periodica.
- (a) Si scrivano sul foglio risposte i parametri dello sviluppo di  $f$  in serie di seni e coseni (serie di Fourier); (1+1+2+2 punti);
  - (b) si dica se la serie di Fourier converge puntualmente e in caso affermativo a cosa converge (motivando - 3 punti);
  - (c) si usi quanto trovato sopra per dire se l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'' + 16\pi^2 y = 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione e in caso affermativo se ha un'unica soluzione (3 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 10y = f$$

- (a) Sia  $f(t) = H(t)e^{-t}$ , dove  $H(t) = 1$  per  $t > 0$  e  $H(t) = 0$  per  $t < 0$ ; si trovi la soluzione  $y(t)$  con la condizione

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y'(t) = 0.$$

(È RICHIESTO il procedimento - 12 p.)

- (b) Per la stessa  $f$  del punto precedente si trovi la soluzione  $y(t)$  con la condizione

$$y(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

(6p.)

- (c) Con la stessa condizione del punto precedente si trovi la soluzione per  $f = \delta$  (6p.).

5. (a) Si descrivano le distribuzioni  $u$  che risolvono l'equazione: (4 p.)

$$(1+t)^2 u = 0;$$

- (b) (\*) si descrivano le distribuzioni  $u$  che risolvono l'equazione: (4 p.)

$$(1+t)^2 u = \delta;$$

- (c) se  $u(t) = H(t)e^{-t}$  si calcoli  $u'' + u'$  (4 p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

--

voto

Cognome:																				
Nome:																				
Matricola:																				

(1a)  $\|f_n\|_\infty = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \frac{1}{n^{2/3}}$ ;

(1b)  $A = [0, +\infty[$ ;

--	--

(1c)  $s$  è continua per  $x \in [0, +\infty[$ , infatti:

Fissiamo  $M > 0$ . Si vede che:

$$\|f_m\|_{\infty, [0, M]} = \max_{0 \leq x \leq M} f_m(x) = f_m(M).$$

Dato che  $f_m(M) \approx \frac{c \cdot M}{m^2}$  si deduce

$$\sum \|f_m\|_{\infty, [0, M]} < +\infty \Rightarrow s \text{ è continuo su } [0, M]$$

Per l'arbitrarietà di  $M$   $s$  è continuo su  $\mathbb{R}$ .

(1d) (\*) la serie converge uniformemente su  $\mathbb{R}$   sì  no, infatti:

CONVERGENZA UNIFORME SU  $[0, +\infty[ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$ .

Pero se  $m \in \mathbb{N}$  si ha:

$$S(m^{2/3}) \geq \sum_{n=1}^m f_n(m^{2/3}) = \sum_{n=1}^m \frac{m^{4/3}}{n^2 + m^2} \geq \sum_{n=1}^m \frac{m^{4/3}}{m^2 + m^2}$$

$$= \frac{m \cdot m^{4/3}}{2m^2} = \frac{1}{2} m^{1/3} \rightarrow +\infty \text{ per } m \rightarrow \infty$$

Questo contraddice che  $S(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$

(1e) le  $f_n$  sono in  $L^1(\mathbb{R})$   sì  no; la serie delle  $f_n$  converge in  $L^1(\mathbb{R})$   sì  no;

(1f) le  $f_n$  sono in  $L^2(\mathbb{R})$   sì  no; la serie delle  $f_n$  conv. ass. in  $L^2(\mathbb{R})$   sì  no, infatti:

È chiaro che  $f_m(x)^2 \approx \frac{1}{x^2} \Rightarrow f_m \in L^2$ . Allora  
 $\|f_m\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(n^2+x^3)^2} dx = (x^3 = n^2 y^3 \Rightarrow dx = \sqrt[3]{n^2} dy)$   
 $\int_0^{+\infty} \frac{n^{3/3} y^4}{(n^2+n^2 y^3)^2} n^{2/3} dy = \frac{1}{n^{2/3}} \int_0^{+\infty} \frac{y^4}{(1+y^3)^2} dy$ .  
 Allora  $\|f_m\|_2 = \frac{\text{cost.}}{n^{1/2}}$  che dà luogo a una  
 serie armonica DIVERGENTE.

(2) integrale =  (CALCOLI NELLE FACCIATE BIANCHE);

(3a)  $\omega_0 =$  ,  $a_0 =$  ,  $a_n =$  ,  $b_n =$  .

(3b) la serie di Fourier converge puntalmente  sì  no; inoltre essa converge a

$f(x)$  se  $x$  non è multiplo di 1 (cioè se  $x \notin \mathbb{Z}$ ). Invece per  $x$  intero la serie converge a 0, che è la media tra il limite destro e il limite sinistro.

(3c) l'equazione ha soluzione  sì  no; inoltre ha soluzione unica  sì  no.

SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO (1d)

voto

Cognome:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matricola:

--	--	--	--	--	--

(4a) La soluzione  $y(t)$  è data da: (CALCOLI NELLA FACCIATA BIANCA)

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}}{17} & \text{se } t > 0 \\ \frac{e^{3t}}{17} (\cos(t) - 4 \sin(t)) & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

(4b) La soluzione  $y(t)$  è data da:

$$y(t) = \frac{H(t)}{17} \left( e^{-t} - e^{3t} (\cos(t) - 4 \sin(t)) \right)$$

(4c) La soluzione  $y(t)$  è data da:

$$y(t) = H(t) e^{3t} \sin(t)$$

(5a) Le soluzioni  $u$  sono date da:

$$u(t) = c \delta(t+1) + d \delta'(t+1)$$

$c, d$  costanti

(5b) Le soluzioni  $u$  sono date da:

$$u(t) = \delta(t) + c \delta(t+1) + d \delta'(t+1)$$

$c, d$  costanti

(5b)  $u'' + u' =$

$$\delta'$$

---

SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO (4a)

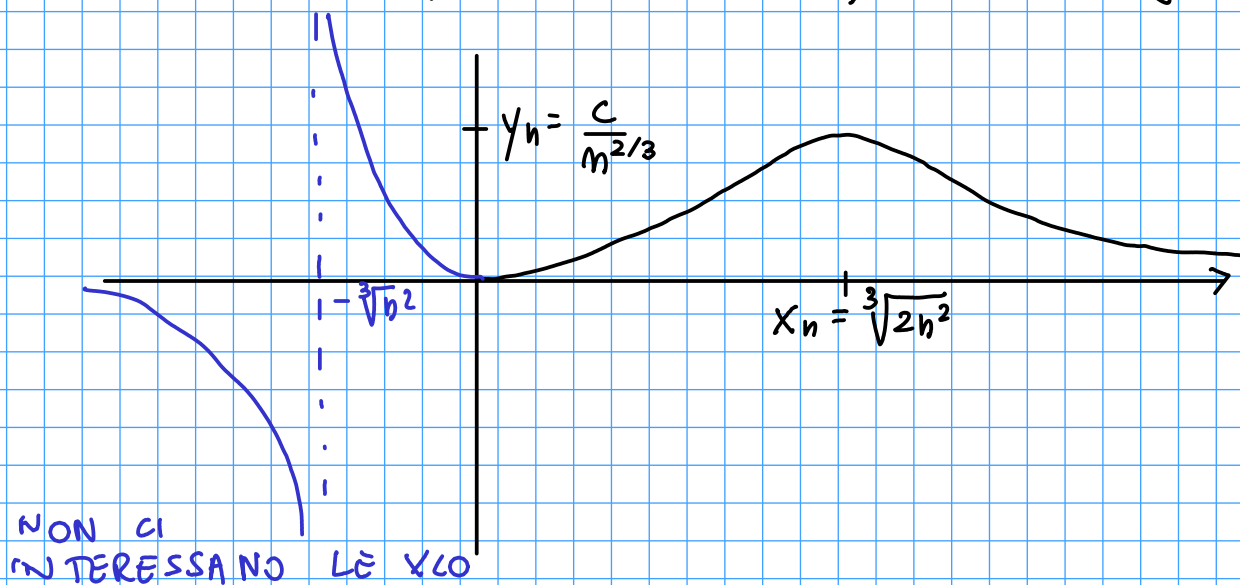
$f_m(x) = \frac{x^2}{m^2 + x^3}$ , per  $x \geq 0$  e  $m \geq 1$ . È chiaro che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_m(x) = 0$  ( $0^+/0^-$ )  
 e che  $f_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{m^2}$  ( $f_m > 0 \Leftrightarrow x > -\sqrt[3]{m^2}$ ). Calcoliamo la derivata:

$$f_m'(x) = \frac{2x(m^2 + x^3) - x^2 \cdot 3x^2}{(m^2 + x^3)^2} = \frac{x}{(m^2 + x^3)^2} (2m^2 - x^3).$$

Allora  $f_m'(x) = 0$  se e

solo se  $x = 0$  oppure  $x = x_m$  dove  $x_m := \sqrt[3]{2m^2}$ . Guardando il segno di  $f_m'$  si ricava

che  $x_m$  è pto di massimo; inoltre  $f_m(x_m) = \frac{\sqrt[3]{4m^4}}{m^2 + 2m^2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \frac{1}{m^{2/3}} =: y_m$



DUNQUE

$$(a) \|f_m\|_{\infty} = y_m = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \frac{1}{m^{2/3}}.$$

Per quanto riguarda (b), cioè la  
 convergenza puntuale della serie.

è chiaro che  $A = [0, +\infty[$ ,  
 visto che per  $x = 0$   $f_m(x) = 0$ , mentre per  $x > 0$   $f_m(x) \approx \frac{c}{m^2}$ , che corrisponde  
 a una serie armonica di esponente  $2 > 0$ , quindi convergente.

(c) Fissiamo  $M > 0$ . Allora per  $m$  grande  $x_m > M$ . Questo implica che

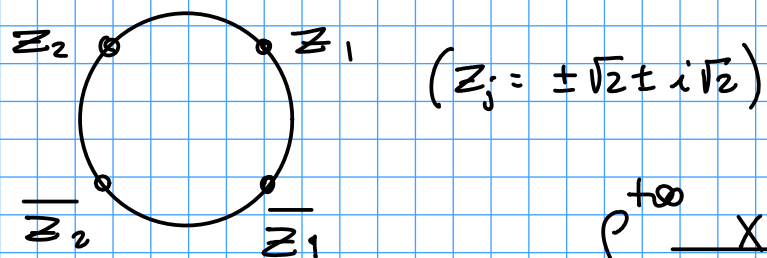
$\|f_m\|_{\infty, [0, M]} = \max_{0 \leq x \leq M} f_m(x) = f_m(M)$  e quindi (vedi punto b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, [0, M]} < +\infty$

Per i teoremi noti si ha che  $S$  è continuo su  $[0, M]$  e allora ( $M$  è arbitrario)  $S$  è continuo su  $\mathbb{R}$ .

(d) A  $n$  fissato si ha  $f_n(x) \approx \frac{1}{x}$  per  $x \rightarrow \infty$ , e quindi  $f_n$  NON È INTEGRABILE SU  $[0, +\infty[$

(e) Vedi spiegazione nelle soluzioni

(2)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+16} dx.$



Il denominatore ha quattro radici semplici disposte sul cerchio di raggio 2 come nel disegno. Per calcolare l'integrale usiamo la formula

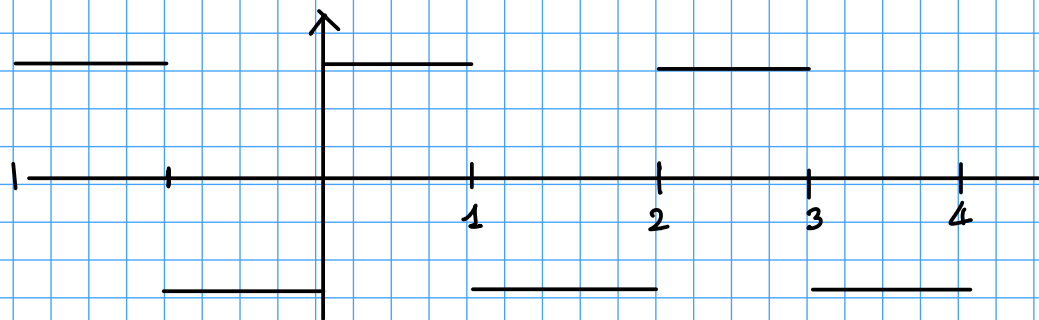
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+16} dx = 2\pi i \left[ \text{Res}(f(z), z_1) + \text{Res}(f(z), z_2) \right] = (*)$$

dove  $f(z) = \frac{z^2}{z^4+16}$ . Per le formule sui residui:

$$(*) = 2\pi i \left[ \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=z_1} + \frac{z^2}{4z^3} \Big|_{z=z_2} \right] = \frac{\pi i}{2} \left[ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right] = \frac{\pi i}{2} \left[ \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} \right]:$$

$$\frac{\pi i}{2} \frac{\cancel{\sqrt{2}} - i\sqrt{2} - \cancel{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{4} \sqrt{2}. \text{ DATO CHE L'INTEGRANDO È PARI, per aver l'integrale su } [0, +\infty[ \text{ basta dimezzare il risultato.}$$

(3) Se rappresentiamo la funzione possiamo notare che essa è dispari



(2) Si vede subito, allora, che

$$T = 2, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$a_0 = 0 \quad e \quad a_m = 0 \quad \forall m \geq 1$$

Rimangono da calcolare i  $b_m$ . Usando la formula

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-1}^1 f(t) \sin(m\omega_0 t) dt = \int_{-1}^1 f(t) \sin(m\pi t) dt = \text{(per la disparità di } f)$$
$$2 \int_0^1 f(t) \sin(m\pi t) dt = 2 \int_0^1 \sin(m\pi t) dt = 2 \left[ \frac{-\cos(m\pi t)}{m\pi} \right]_0^1 = \frac{2(1 - (-1)^m)}{m\pi}$$

(b) Vedi quanto scritto nella soluzione. Il tutto è conseguenza del teorema sulla convergenza puntuale, valido dato che  $f$  è regolare e tratti.

(c) Ricordiamo la teoria: si cerca la soluzione  $y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin(m\pi t)$

e quindi si arriva a:

$$\textcircled{\star} \quad (-m^2\pi^2 + 16\pi^2) u_m = f_m$$

dove  $f_m$  sono i coefficienti trovati sopra. Dato che per  $m=4$  il coefficiente di

$u_m$  in (\*) vale zero, la soluzione esiste se e solo se  $f_4 = 0$ . Dato che

$$f_4 = \frac{1 - (-1)^4}{4\pi} = 0 \quad \text{la soluzione esiste. Peraltro essa non è unica dato}$$

che si può aggiungere un termine del tipo  $\gamma \sin(4\pi t)$  con  $\gamma$  arbitrario.

(4)  $y'' - 6y' + 10y = H(t)e^{-t}$  . Usiamo la trasformata di Fourier

Calcoliamo innanzitutto la trasformata del termine noto:

$$\mathcal{F}(H(t)e^{-t})(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt = \left[ \frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+i\omega} = \frac{-i}{\omega-i}$$

Trasformando l'equazione:

$$(-\omega^2 - 6i\omega + 10) \hat{y}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{i}{(\omega^2 + 6i\omega - 10)(\omega - i)}$$

L'ultimo equo glielo ho reso perché il denominatore ha tre radici complesse

(E NON REALI) che sono  $i$ ,  $-3i \pm i$  e perché all'infinito la funzione va come

$\frac{1}{\omega^3}$  DUNQUE è  $L^2(\mathbb{R})$ . Posto  $g(z) := \frac{i e^{izt}}{(z^2 + 6iz - 10)(z - i)}$  si ha:

•  $\text{Res}(g, i) = \frac{i e^{-t}}{-1 - 6 - 10} = \frac{-i e^{-t}}{17}$

$$\cdot \operatorname{Res}(g, -3i+1) = \frac{i e^{izt}}{(z+3i+1)(z-i)} \Big|_{z=-3i+1} = \frac{i e^{3t+it}}{2(-4i+1)} = \frac{i(1+4i) e^{3t} e^{it}}{34}$$

$$\cdot \operatorname{Res}(g, -3i-1) = \frac{i e^{izt}}{(z+3i-1)(z-i)} \Big|_{z=-3i-1} = \frac{i e^{3t-it}}{(-2)(-4i-1)} = \frac{i(1-4i) e^{3t} e^{-it}}{34}$$

Dunque, per i metodi visti, si ha:

$$y(t) = \begin{cases} i \operatorname{Res}(g, i) = \frac{e^{-t}}{17} & \text{se } t > 0 \\ (-i) \left( \operatorname{Res}(g, -3i+1) + \operatorname{Res}(g, -3i-1) \right) = \frac{e^{3t}}{34} \left\{ (1+4i) e^{it} + (1-4i) e^{-it} \right\} = \\ = \frac{e^{3t}}{17} (\cos(t) - 4 \sin(t)) & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

(b) Per risolvere il problema con condizione  $y(t) = 0$  per  $t < 0$  usiamo Laplace. Trasformiamo il termine noto:

$$\mathcal{L}(H(t) e^{-t}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-zt} dt = \left[ \frac{e^{-(1+z)t}}{-(1+z)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{z+1}$$

e poi applichiamo  $\mathcal{L}$  all'equazione:

$$(z^2 - 6z + 10) \mathcal{L}(y)(z) = \frac{1}{z+1} \Leftrightarrow \mathcal{L}(y)(z) = \frac{1}{(z^2 - 6z + 10)(z+1)}$$

Per ricavare  $y(t)$  usiamo i residui: se  $g(z) = \frac{e^{zt}}{(z^2 - 6z + 10)(z + 1)}$

i poli sono  $z = -1$ ,  $z = 3 \pm i$ , e

$$\text{Res}(g, -1) = \frac{e^{zt}}{(z^2 - 6z + 10)} \Big|_{z=-1} = \frac{e^{-t}}{17}$$

$$\text{Res}(g, 3+i) = \frac{e^{zt}}{(z-3+i)(z+1)} \Big|_{z=3+i} = \frac{e^{3t} e^{it}}{2i(4+i)} = \frac{e^{3t}}{34} e^{it} (-1-4i)$$

$$\text{Res}(g, 3-i) = \overline{\text{Res}(g, 3+i)} = \frac{e^{3t}}{34} e^{-it} (-1+4i) \Rightarrow$$

$$y(t) = \text{somme di tutti i residui} = \frac{e^{-t}}{17} - \frac{e^{3t}}{17} \text{Re}(e^{it(1+4i)}) =$$
$$= \frac{e^{-t}}{17} - \frac{e^{3t}}{17} (\cos(t) - \sin(t)) \quad \text{PER } t > 0$$

(mentre  $y(t) = 0$  per  $t < 0$ )

$$\Rightarrow y(t) = \frac{H(t)}{17} \left( e^{-t} - e^{3t} (\cos(t) - 4 \sin(t)) \right)$$

(c) Usiamo di nuovo lo trasformata di Laplace. Dato che  $L(\delta) = 1$  abbiamo

$$L(y)(\omega) = \frac{1}{-z^2 - 6z + 10} \Rightarrow \text{(due dei residui sono coniugati)}$$

$$y(t) = 2 \text{Re} \left( \text{Res} \left( \frac{e^{zt}}{z^2 - 6z + 10}, 3+i \right) \right) = 2 \text{Re} \left( \frac{e^{zt}}{2z-6} \Big|_{z=3+i} \right) = 2 e^{3t} \text{Re} \left( \frac{e^{it}}{2i} \right) = e^{3t} \sin(t)$$

(per  $t > 0$ , mentre  $y(t) = 0$  per  $t < 0$ )

$$(5) (a) (1+t)^2 u = 0$$

Per quanto visto a lezione, essendo  $-1$  radice doppia di  $(1+t)^2$

$$u = c \delta(t+1) + d \delta'(t+1)$$

al valore di  $c, d$  in  $\mathbb{R}$

$$(b) (1+t)^2 u = \delta$$

Una soluzione è  $u = \delta$  dato che  $(1+t)^2 \delta = (1+t)^2|_{t=0} \delta = \delta$

Allora l'insieme delle soluzioni si ottiene aggiungendo quelle del punto (a)

ci è 
$$u = \delta(t) + c \delta(t+1) + d \delta'(t+1)$$

(c) se  $u(t) = H(t) e^{-t}$  si ha

$$u'(t) = \delta(t) e^{-t} - H(t) e^{-t} = \delta(t) e^{-0} - H(t) e^{-t} = \delta(t) - H(t) e^{-t}$$

$$u''(t) = \delta'(t) - \delta(t) e^{-t} + H(t) e^{-t} = \delta'(t) - \delta(t) + H(t) e^{-t}$$

$$\Rightarrow u'' + u' = \delta'$$