

1. Sia data la successione di funzioni definite su tutto \mathbb{R} da $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3 + x^4}$.

Si chiede di rispondere ai seguenti quesiti negli appositi spazi del foglio risposte, aggiungendo una breve motivazione quando richiesta (deve stare nelle righe previste - nel caso del punto (1d) sono richiesti dei calcoli e di conseguenza c'è più spazio disponibile).

- (a) Calcolare la norma uniforme di ogni f_n (2 punti);
- (b) individuare l'insieme A delle x per cui $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (1 punto);
- (c) dire per quali x di A la somma della serie $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è continua in x (motivando - 2 punti);
- (d) calcolare la norma di f_n in $L^1(\mathbb{R})$ (facendo vedere il procedimento usato - 8 punti);
- (e) dire se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente in $L^1(\mathbb{R})$ (motivando - 2 punti);
- (f) dire se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge in $L^2(\mathbb{R})$, (motivando - 4 punti);
- (g) (*) dire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge in $L^1(\mathbb{R})$ (motivando - 3 punti).

2. Data la funzione definita da $f(t) := \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - t & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi, \end{cases}$ ed estesa a tutto \mathbb{R} in modo da essere π -periodica.

- (a) Si scrivano sul foglio risposte i parametri dello sviluppo di f in serie di seni e coseni (serie di Fourier); (1+1+3+3 punti);
- (b) si dica se la serie di Fourier converge puntualmente a f (motivando - 3 punti);
- (c) si dica se la serie delle derivate converge in qualche senso alla derivata di f (motivando - 3 punti);
- (d) (*) si dica se la serie converge uniformemente a f (motivando- 3 punti).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA.

--

voto

Cognome:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nome:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matricola:

--	--	--	--	--	--	--

(1a) $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2\sqrt{n^3}}$;

(1b) $A = \mathbb{R}$;

--	--

(1c) converge per $x \in \mathbb{R}$, infatti

$\sum_n \|f_n\|_\infty = \sum_n \frac{1}{2n^{3/2}} < +\infty$ ($3/2 > 1$). Dunque
 la serie conv. totalmente, da cui uniformemente.
 Ne segue che la somma $S(x)$ è continua
 su \mathbb{R} . (NOTA che $\|f_n\|_\infty = \|f_n\|_{\mathbb{R}, \infty}$)

(1d) $\|f_n\|_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}n^{3/4}}$ (CALCOLI NELLA FACCIATA BIANCA);

(1e) converge assolutamente in L^1 sì no, infatti

Per il punto precedente
 si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}} = +\infty$.
 (perché $\frac{3}{4} < 1$).

(1f) converge in L^2 no , infatti

$$\|f_m\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{m^3+x^4}\right)^2 dx = \left(x = m^{\frac{3}{4}}y \Rightarrow dx = m^{\frac{3}{4}}dy\right)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m^3 y^4}{(m^3+m^3y^4)^2} m^{\frac{3}{4}} dy = \frac{1}{m^{9/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^4}{(1+y^4)^2} dy = \frac{c}{m^{9/4}}$$

Dunque $\|f_m\|_2 = \frac{c}{m^{9/8}} \Rightarrow \sum_1^{\infty} \|f_m\|_2^2 = c \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^{9/4}}$
che converge dato che $\frac{9}{4} > 1$. Dunque la serie converge assolutamente in $L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ conv. in $L^2(\mathbb{R})$

(1g) (*) converge in L^1 sì no , infatti

Se $\sum_1^{\infty} f_m$ convergesse in $L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ la sua somma $S(x)$ dovrebbe essere integrabile su \mathbb{R} e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(x) dx = \sum_1^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x) dx.$$

Ma la serie degli integrali (che coincidono con $\|f_m\|_1$ essendo $f_m \geq 0$) è divergente per il punto (d)

(2a) $\omega_0 =$, $a_0 =$, $a_n =$, $b_n =$

(2b)

Dato che f è regolare e tratti la serie conv. puntualmente a $f(x)$ dove è continuo (e a $\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$ se f ha un salto in t_0)
DATO che f è anche continua la conv. puntuale si ha in ogni punto.

(2c)

Consideriamo $c_m = a_m - i b_m = e_m$. Dato che
 $|c_m| \leq \frac{\text{cost.}}{m^2} \Rightarrow |m c_m| \leq \frac{\text{cost.}}{m}$ e
 $|m c_m|^2 \leq \frac{\text{cost.}}{m^2}$. Allora $\sum_n |m c_m| < +\infty$
Per quanto visto, ciò implica che esiste f' in
senso L^2 e la serie delle derivate tende a f'
in $L^2(\mathbb{R})$

(2d)

Dalle proprietà $\sum_n |m c_m|^2 < +\infty$, dimostrato
al punto precedente, si ricava che f è
somma unif. della sua serie di Fourier
(VISTO A LEZIONE - DALLA PROPRIETÀ SOPRA
SI RICAVA CHE $\sum_n |c_m| < +\infty$, da cui f unif.)

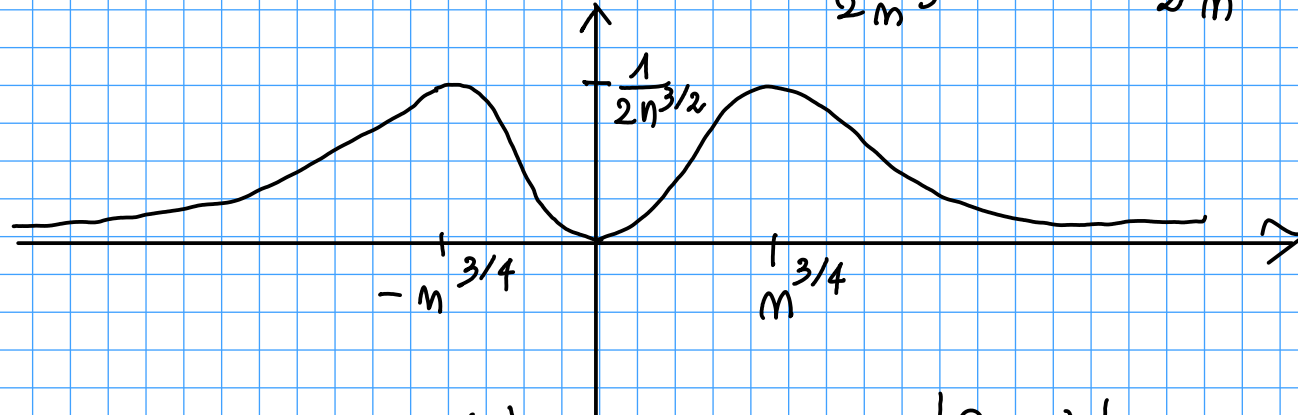
SPAZIO PER IL CALCOLI RELATIVI AL PUNTO (1d)

(1) $f_m(x) = \frac{x^2}{m^3 + x^4}$. Facciamo il grafico di f_m . ($m \geq 1$)

f_m è pari. $f(0) = 0$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_m(x) = 0$. Con calcoli semplici si ha:

$$f_m'(x) = \frac{2x}{(m^3 + x^4)^2} (m^3 - x^4) \quad \text{DA CUI } f_m'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm m^{\frac{3}{4}} \text{ o } x = 0.$$

Dato che $f_m\left(\pm m^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{2m^3} = \frac{1}{2m^{3/2}}$, $f_m(0) = 0$ si ha:



Si vede allora che (a) $\|f_m\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) = \frac{1}{2m^{3/2}}$

(b) È chiaro che, a $x \neq 0$ fissato, $f_m(x) \approx \frac{1}{m^3}$ e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} f_m(x)$ converge. Se $x=0$ $f_m(x) = 0$, dunque a maggior ragione la serie conv.

$$\Rightarrow A = \mathbb{R}$$

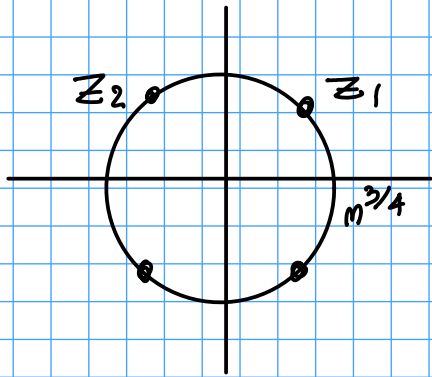
(c) VEDI RISPOSTA NEL FOGLIO SOPRA

(d) $\|f_m\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{m^3+x^4} dx$. Per calcolarla usiamo i residui:

$$\|f_m\|_1 = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}(f_m(z), z_j) \quad \text{dove } z_j \text{ sono le radici di } m^3+z^4=0$$

con $\operatorname{Im}(z) > 0$

Si vede facilmente che di tali radici ce ne sono due:



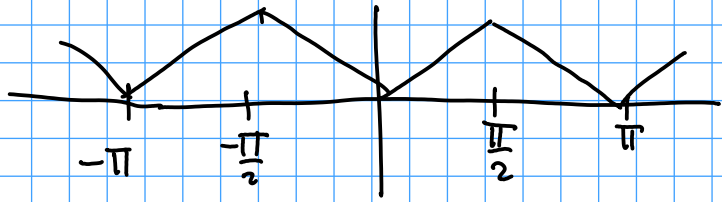
$$z_1 = m^{3/4} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad z_2 = m^{3/4} \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \quad (\text{semplici})$$

Dunque (usando la formula $\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$,
valido quando z_0 è radice semplice di Q)

$$\begin{aligned} \|f_m\|_1 &= 2\pi i \left(\left. \frac{z^2}{4z^3} \right|_{z=z_1} + \left. \frac{z^2}{4z^3} \right|_{z=z_2} \right) = \frac{\pi i}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{\pi i}{2} (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1}{m^{3/4}} + \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \frac{1}{m^{3/4}} \right) = \frac{\pi i}{2 m^{3/4}} \left(\frac{-2i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{m^{3/4}}. \end{aligned}$$

(e)
(f)
(g) } VEDI RISPOSTE SUL FOGLIO

(2) (a) $\omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. Per calcolare i coeff. conviene passare all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, dato che $f(t) = -t$ quando $t \in [-\pi/2, 0]$. In questo modo $f(t) = |t|$ in $[-\pi/2, \pi/2]$. Allora



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t dt = \frac{2}{\pi} \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

• DATO CHE f è pari è evidente che $b_m = 0 \forall m$.

• Calcoliamo gli a_m per $m \geq 1$. Usando lo posto:

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |t| \cos(2mt) dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} t \cos(2nt) dt = \text{(per parti)}$$

$$\frac{4}{\pi} \left[t \frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_0^{\pi/2} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{2n} dt = -\frac{2}{n\pi} \left[\frac{-\cos(2nt)}{2n} \right]_0^{\pi/2} =$$

$= 0$ sia in 0 che in $\pi/2$

$$= \frac{1}{m^2\pi} (\cos(m\pi) - 1) = \frac{(-1)^m - 1}{\pi m^2} \left(\begin{array}{l} \circ \text{ se } m \text{ PARI} \\ -\frac{2}{\pi m^2} \text{ se } m \text{ DISPARI} \end{array} \right)$$