Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 21 febbraio 2011

PRIMA PARTE (per tutti)

(a.1) Sia α un parametro reale e si consideri la successione di funzioni $f_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definite da $f_n(x) := n^\alpha x^4 e^{-2nx^2}$.

1. Si dica per quali valori di α la successione (f_n) converge uniformemente su $[0, +\infty[$;
2. Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su $[0, +\infty[$.
3. Si dica per quali α la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ definisce una funzione continua su $]0, +\infty[$.
4. ($\star$) Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$.

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2 + 2x + 10)}\, dx.$$

(b.1) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = \sin(t)e^{-2|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}.$$

(b.2) Dati il parametro reale α e la successione di funzioni del punto (a.1)

1. si trovino i valori di α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0, +\infty[)$;
2. si dica se ci sono dei valori di α per cui la la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^2([0, +\infty[)$.

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

(c.1) Si consideri il problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 20y = f \\ y(t) = 0 \text{ per } t < 0. \end{cases}$$

Si trovi la soluzione y nei due casi seguenti:

1. $f = \delta$;
2. $f(t) = H(t)\cos(t)$.

(c.2) Si trovino tutte le distribuzioni u tali che:

1. $(t^2 - 4)u = \delta$;
2. $t^2 u = 0$.

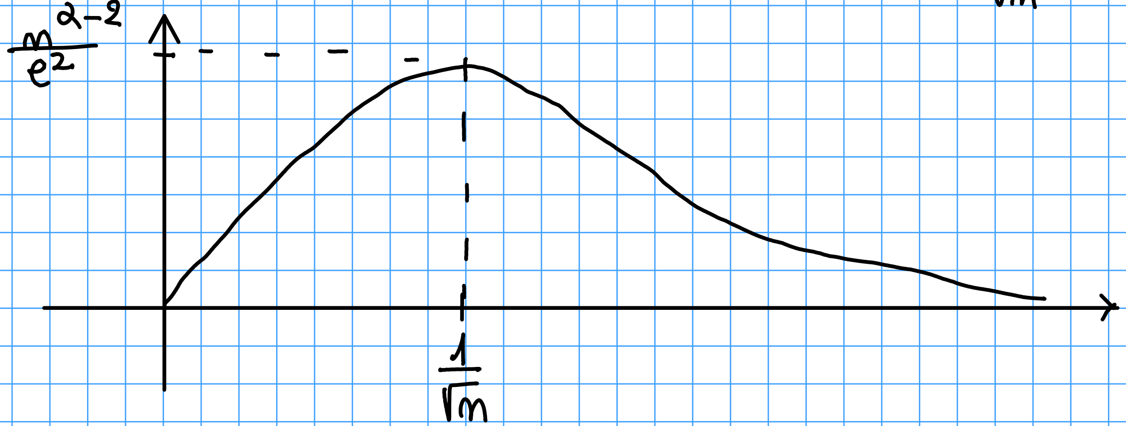
(a.1) $f_n(x) = n^{\alpha} x^4 e^{-2nx^2}$

Studio $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$. $\quad f_n(0)=0$, $\quad \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0 \quad$ (se $n \geq 1$)

$$f_n'(x) = 4x^3 n^{\alpha} e^{-2nx^2} - 4nx\cdot x^4 n^{\alpha} e^{-2nx^2} = n^{\alpha} e^{-2nx^2}\cdot 4x^3(1-nx^2)$$

quindi $f_n'(x) = 0 \iff x = x_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$. Possiamo tracciare il grafico di f_n

$$\left(g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n^{\alpha}}{n^2} e^{-2} = \frac{n^{\alpha-2}}{e^2} \right)$$



(a) Se facciamo il limite puntuale troviamo $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$ & $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(se $x=0$ è ovvio - se $x>0$ c'è l'esponenziale che "vince")

Dunque il limite uniforme se esiste vale zero. Vediamo allora per quali α si ha $f_n \to 0$ unif.. Questo equivale a $\|f_n\|_{\infty} \to 0$, cioè

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha-2}}{e^2} = 0 \iff \alpha - 2 < 0 \iff \boxed{\alpha < 2}$$

(b) La convergenza totale della serie corrisponde alla convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$

cioè α : $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{m^{\alpha-2}}{e^2} < +\infty \iff \alpha-2 < -1 \iff \boxed{\alpha < 1}$

(c) Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora per n abbastanza grande $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ (per la precisione $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$). Dunque per tali n il massimo di f_n sulle $x \geq \varepsilon$ si realizza in $x = \varepsilon$; in altri termini

$$\|f_n\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} = f_n(\varepsilon) = n^{\alpha} \varepsilon^4 e^{-2\varepsilon^2 n}.$$ Ma allora

$$\sum_1^{\infty} \|f_n\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} = \varepsilon^4 \sum_1^{\infty} n^{\alpha} e^{-2\varepsilon^2 n} < +\infty \quad \underline{\underline{\forall \alpha}}$$ (sempre a causa dell'esponenziale)

Dunque $\boxed{\forall \alpha}$ la serie converge totalmente su $[\varepsilon, +\infty[$ e come tale la sua somma è continua su $[\varepsilon, +\infty[$ $\Rightarrow$ per l'arbitrarietà di ε la somma $\sum_1^{\infty} f_n(x)$ è continua su $]0, +\infty[$.

(d) Abbiamo visto al punto (b) la conv totale ($\Rightarrow$ uniforme) per $\alpha < 1$. Mostriamo che se $\alpha \geq 1$ la serie non converge unif su $[0, +\infty[$ - prendo $\underline{\alpha = 1}$ (se $\alpha > 1$ il discorso è simile). Se ci fosse convergenza uniforme avrei

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_1^{\infty} f_n(x) = \sum_1^{\infty} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0.$$ Però, fissato $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_1^{\infty} f_n\left(\frac{1}{m}\right) \geq \sum_{n=m^2}^{2m^2} \frac{n}{m^4} e^{-2\frac{n}{m^2}} \geq \sum_{n=m^2}^{2m^2} \frac{m^2}{m^4} e^{-2\cdot 2} = e^{-4} m^2 \cdot \frac{1}{m^2} = e^{-4}$$

e questo rende impossibile che $\lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(1/m) = 0$

(a.2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2+2x+10)}\,dx$. Possiamo a

$$\circledast \quad (v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix}}{x(x^2+2x+10)}\,dx = \pi i \,\mathrm{Res}(0) + 2\pi i \,\mathrm{Res}(-1+3i)$$

dove i residui sono relativi a $f(z)=\dfrac{e^{-2iz}}{z(z^2+2z+10)}$ che ha tre poli $z=0$, $z=-1\pm 3i$.

$$\mathrm{Res}(0) = \left.\frac{e^{-2iz}}{z^2+2z+10}\right|_{z=0} = \frac{1}{10}$$

$$\mathrm{Res}(-1+3i) = \left.\frac{e^{2iz}}{z(z+1+3i)}\right|_{z=-1+3i} = \frac{e^{2i(-1+3i)}}{(-1+3i)\,6i} = \frac{e^{-6}e^{-2i}(-1-3i)}{60i}$$

$$\Rightarrow \circledast = \frac{\pi}{10}i - \frac{2\pi}{60}e^{-6}\left(\cos(2)-i\sin(2)\right)(1+3i) =$$

$$\frac{\pi}{10}i - \frac{\pi}{30}e^{-6}\left[\left(\cos(2)+3\sin(2)\right)+i\left(3\cos(2)-\sin(2)\right)\right]$$

Da cui, prendendo la parte immaginaria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2+2x+10)}\,dx = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{30}e^{-6}\left(3\cos(2)-\sin(2)\right)$$

(b.1) $y'' - 2y' + 5y = \sin(t)\,e^{-2|t|}$ possiamo a

$$y_1'' - 2y_1' + 5y_1 = \underbrace{e^{it}\underbrace{e^{-2|t|}}_{b(t)}}_{b_1(t)}$$ Trasformiamo con Fourier

$$\widehat{b_1}(\omega) = \widehat{b}(\omega - 1) \; ; \; \widehat{b}(\omega) = \frac{4}{\omega^2+4} \Rightarrow \widehat{b_1}(\omega) = \frac{4}{(\omega-1)^2+4}$$

dunque si trova

$$\widehat{y}_1(\omega)\left(-\omega^2 - 2i\omega + 5\right) = \frac{4}{(\omega-1)^2+4} \Leftrightarrow \widehat{y}_1(\omega) = \frac{-4}{(\omega^2+2i\omega-5)(\omega^2-2\omega+5)}$$

Posto $g(z) := \dfrac{-4e^{itz}}{(z^2+2iz-5)(z^2-2z+5)}$, dove g ha quattro poli semplici in $z = \pm 2 - i$ e $z = 1 \pm 2i$. Si ha:

$$\mathrm{Res}(g(z), 2-i) = -\frac{e^{2it}(2+i)}{10} e^{t}$$

$$\mathrm{Res}(g(z), -2-i) = \frac{e^{-2it}(2-i)}{30} e^{t}$$ (tralascio i calcoli ...)

$$\mathrm{Res}(g(z), 1+2i) = \frac{e^{it}(1-2i)}{30} e^{-2t}$$

$$\mathrm{Res}(g(z), 1-2i) = \frac{e^{it}(1+2i)}{10} e^{2t}$$

DA CUI

se $t > 0$

$$y_1(t) = i\,\mathrm{Res}(1+2i) = \frac{e^{-2t}(2+i)e^{it}}{30}$$

se $t<0$

$$y_1(t) = -i\left(\mathrm{Res}(1-2i) + \mathrm{Res}(+2-i) + \mathrm{Res}(-2-i)\right) =$$

$$\frac{e^{2t}}{10}\cdot(2-i)e^{it} + \frac{e^{t}}{30}\left[(-3+6i)e^{2it} + (-1-2i)e^{-2it}\right]$$

e passando alla parte immaginaria a ha

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2t}}{30}\left(\cos(t)+2\sin(t)\right) & \text{se } t>0 \\ \dfrac{e^{2t}}{10}\left(-\cos(t)+2\sin(t)\right) + \dfrac{e^{t}}{15}\left(2\cos(2t) - \sin(2t)\right) \end{cases}$$

$$6\cos(2t) - 3\sin(2t) - 2\cos(2t) + \sin(2t) =$$
$$4\cos(2t) - 2\sin(2t)$$

(b.2) $f_n(x) = n^\alpha x^4 e^{-2nx^2}$

(1) Calcoliamo la norma $L^1([0,+\infty[)$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} n^\alpha x^4 e^{-2nx^2}\,dx = \qquad \left(\sqrt{n}\,x = y \quad dx = dy/\sqrt{n}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} n^{\alpha} \frac{y^4}{n^2} e^{-2y^2} \frac{dy}{\sqrt{n}} = n^{\alpha-\frac{5}{2}} \int_0^{+\infty} y^4 e^{-2y^2} dy = \frac{c}{n^{\frac{5}{2}-\alpha}}$$

Allora se $\frac{5}{2} - \alpha > 1$, cioè se $\alpha < \frac{3}{2}$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$

per cui la serie $\sum_1^{\infty} f_n$ converge in L_1. Viceversa se la serie conv. $L^1 \Rightarrow$

$$\mathbb{R} \ni \int_0^{+\infty} \sum_1^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_1^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx \underset{(f_n \geq 0)}{=} \sum_1^{\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| = c \sum \frac{1}{n^{5/2-\alpha}}$$

per cui la condizione $\boxed{\alpha < \frac{3}{2}}$ è necessaria e sufficiente per la conv. L^1.

(2) Calcoliamo la norma L^2:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} f_n^2(x)\, dx = \int_0^{+\infty} n^{2\alpha} x^8 e^{-4nx^2} dx = \left(y = x\sqrt{n},\ x = \frac{y}{\sqrt{n}}\ \ dx = \frac{dy}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} n^{2\alpha} \frac{y^8}{n^4} e^{-4y^2} \frac{dy}{\sqrt{n}} = n^{2\alpha - \frac{9}{2}} \int_0^{+\infty} y^8 e^{-4y^2} dy \Rightarrow \|f_n\|_2 = \frac{c_1}{n^{9/4-\alpha}}$$

Dunque se $\frac{9}{4} - \alpha > 1$, cioè se $\boxed{\alpha < \frac{5}{4}}$, la serie conv. in L^2

(C1) $y'' + 4y' + 20y = f$ Trasformiamo con Laplace

$$\check{y}(z)\,(z^2 + 4z + 20) = \check{f}(z) \iff$$

$$\check{y}(z) = \frac{\check{f}(z)}{z^2+4z+20}.$$

Notiamo che il denominatore ha due radici (semplici) $z = -2 \pm 4i$

(1) Caso $f = \delta \Rightarrow$

$$\check{y}(z) = \frac{1}{z^2+4z+20} \Rightarrow \text{per } t>0 \quad y(t) = \text{Res}(-2+4i) + \text{Res}(-2-4i)$$

dove i residui sono fatti rispetto alla funzione $g(z) = \dfrac{e^{zt}}{z^2+4z+20}$

$$\Rightarrow \text{Res}(-2+4i) = \frac{e^{zt}}{2z+4}\Big|_{z=-2+4i} = \frac{e^{-2t}\,e^{4it}}{8i} = -\frac{e^{-2t}\,e^{4it}}{8}\,i$$

$$\text{Res}(-2-4i) = \overline{\text{Res}(-2+4i)} \Rightarrow$$

$$y(t) = 2\,\text{Re}(\text{Res}(-2+4i)) = \frac{e^{-2t}}{4}\sin(4t) \quad (\text{per } t>0)$$

e in definitiva $y(t) = -\dfrac{H(t)}{4}\,e^{-2t}\sin(4t)$

[per curiosità facciamo la verifica: se

$$y(t) = \frac{H(t)}{4}e^{-2t}\sin(4t) \Rightarrow y'(t) = \underbrace{\frac{\delta}{4}e^{-2t}\sin(4t)}_{=0} - \frac{H(t)}{2}e^{-2t}\sin(4t)$$

$$+ H(t)\,e^{-2t}\cos(4t) = \frac{H(t)}{2}e^{-2t}\left(-\sin(4t) + 2\cos(4t)\right) \Rightarrow$$

$$y''(t) = \frac{\delta(t)}{2} e^{-2t}\left(-\sin(4t) + 2\cos(4t)\right) - H(t)e^{-2t}\left(-\sin(4t)+2\cos(4t)\right)$$
$$+ \frac{H(t)}{2} e^{-2t}\left(-4\cos(4t) - 8\sin(4t)\right) =$$
$$\delta(t) + H(t)e^{-2t}\left(-4\cos(4t) - 3\sin(4t)\right) \implies$$
$$y'' + 4y' + 20y = \delta + H(t)e^{-2t}\left(-4\cancel{\cos}(4t) - 3\sin(4t) - 2\sin(4t) + 4\cancel{\cos}(4t)\right.$$
$$\left. + 5\sin(4t)\right) = \delta \quad !!]$$

(2) Caso $f(t) = H(t)\cos(t)$. Allora $\check{f}(z) = \frac{z}{z^2+1} \implies$

$$g(z) = \frac{z e^{zt}}{(z^2+1)(z^2+4z+20)}$$ ho 4 poli: $z = \pm i$ $z = -2 \pm 4i$ (tutti semplici)

$$\mathrm{Res}(g, i) = \left.\frac{z e^{zt}}{(z+i)(z^2+4z+20)}\right|_{z=i} = \frac{i e^{it}}{2i(-1+4i+20)} = \frac{e^{it}}{2(19+4i)} = \frac{e^{it}(19-4i)}{2\cdot 377}$$

$$\mathrm{Res}(g, -2+4i) = \left.\frac{z e^{zt}}{(z^2+1)(z+2+4i)}\right|_{z=-2+4i} = \frac{(-2+4i)\, e^{-2t} e^{4it}}{(-11-16i)\,8i} = \frac{(-38+21i)}{4\cdot 377} e^{-2t} e^{4it}$$

e gli altri due sono i coniugati $\implies$ se $t > 0$

$$y(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Res}(i) + \mathrm{Res}(-2+4i)\right) = \frac{19\cos(t) + 4\sin(t)}{377} +$$

$$- \frac{38\cos(4t) + 21\sin(4t)}{754} e^{-2t} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{H(t)}{754}\left(38\cos(t) + 8\sin(t) - e^{-2t}\left(38\cos(4t) + 21\sin(4t)\right)\right)$$

(c.2) (1) Le sol. di $(t^2-4)u = 0$ sono $u = c_1\delta(t-2) + c_2\delta(t+2)$

Una sol. particolare di $(t^2-4)u = \delta$ è $-\frac{1}{4}\delta$ (se lo metto nell'eq. trovo $(t^2-4)\left(\frac{-\delta}{4}\right) = (t^2-4)\big|_{t=0}\left(\frac{-\delta}{4}\right) = -4 \cdot -\frac{\delta}{4} = \delta$ (!)

$$\Rightarrow \quad u = c_1\,\delta(t-2) + c_2\,\delta(t+2) - \frac{\delta}{4}$$

(2) E' noto che $t^2 u = 0 \Leftrightarrow u = c_1\delta + c_2\delta'$. Volendo si può usare Fourier. Trasformando $\mathcal{F}(t^2 u) = 0 \Leftrightarrow \hat{u}'' = 0 \Leftrightarrow \hat{u} = c_1 t + c_2 \Rightarrow \ldots$