Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 7 febbraio 2011

PRIMA PARTE (per tutti)

(a.1) Sia α un parametro reale e si consideri la successione di funzioni $f_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definite da $f_n(x) := n^\alpha x^2 e^{-2nx^2}$.

1. Si dica per quali valori di α la successione (f_n) converge uniformemente su $[0, +\infty[$;
2. Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su $[0, +\infty[$.
3. Si dica se per $\alpha = -\frac{1}{2}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $[1, +\infty[$.
4. ($\star$) Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$.

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x(x^2 - 2x + 10)}\, dx.$$

(b.1) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 10y = \sin(2t)e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases} .$$

(b.2) Dati il parametro reale α e la successione di funzioni del punto (a.1)

1. si trovino i valori di α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0, +\infty[)$;
2. si dica se, per $\alpha = 0$, la la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^2([0, +\infty[)$

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

(c.1) Si consideri il problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 20y = f \\ y(t) = 0 \text{ per } t < 0. \end{cases}$$

Si trovi la soluzione y nei due casi seguenti:

1. $f = \delta$;
2. $f(t) = H(t)\sin(t)$.

(c.2) Si trovino tutte le distribuzioni u tali che:

1. $(t^2 - 4)u = 1$;
2. $(t^2 + 1)u = \delta$.

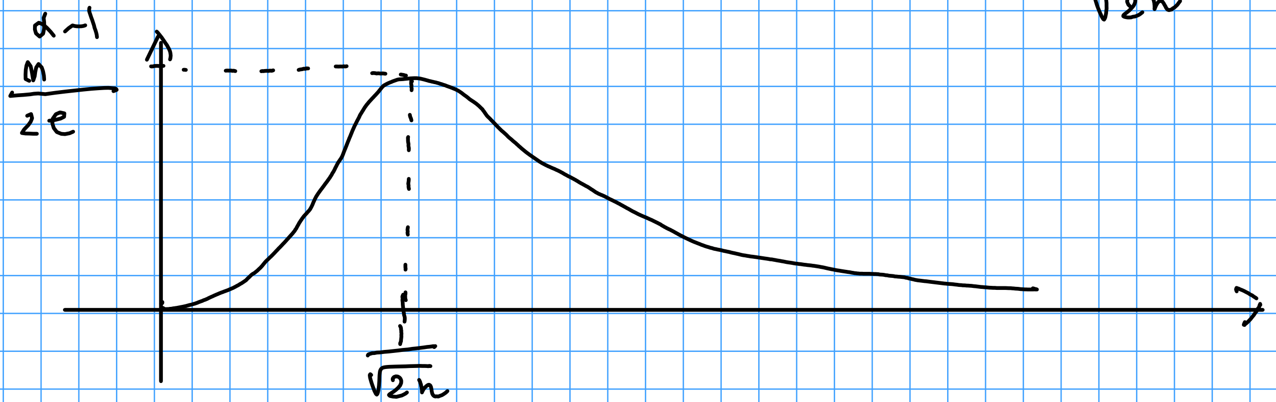
(e.1) $$f_n(x) = n^\alpha x^2 e^{-2nx^2}$$

Per tutto quanto segue è utile tracciare il grafico di f_n. Si ha $(\forall n \geq 1)$

$$f_n(0)=0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (\text{qualunque sia } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$f_n'(x) = n^\alpha 2x e^{-2nx^2} + n^\alpha x^2(-4nx)e^{-2nx^2} = 2n^\alpha x e^{-2nx^2}(1-2nx^2)$$

$$\Rightarrow f_n'(x) = 0 \iff x = x_n := \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$ Allora il grafico è



$$\left(f(x_n) = \frac{n^\alpha}{2n} e^{-1} = \frac{n^{\alpha-1}}{2e} \right.$$

A questo punto possiamo alle varie domande.

(a) Per discutere la conv. uniforme dobbiamo individuare il (possibile) limite delle f_n. Per questo conviene guardare prima la conv. puntuale. Si ha, per $x \geq 0$ fissato

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha x^2 e^{-2nx^2} = 0 \qquad \forall \alpha$$

(se $x=0$ è ovvio – se $x>0$ conta l'esponenziale e^{-2nx^2} che "vince" su n^α qualunque sia α). Allora se f_n converge unif. deve convergere a $f(x)=0$. Questo equivale a

$$\|f_n\|_\infty \to 0 \iff \frac{n^{\alpha-1}}{2e} \to 0 \iff \alpha-1<0 \iff \boxed{\alpha<1}$$

(b) La conv. totale richiede la conv. della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum \frac{1}{2e}\frac{1}{n^{1-\alpha}} < +\infty \iff 1-\alpha>1 \iff \boxed{\alpha<0}$$

(c) Il valore $\alpha=-\frac{1}{2}$ è <0 $\Rightarrow$ la serie conv. totalmente (per (b))

$\Rightarrow$ la serie conv. unif.

(d) A causa di (b) la serie conv. unif. per gli $\alpha<0$. Mostriamo che per $\alpha \geq 0$ la serie non conv. unif. Basta considerare il caso $\alpha=0$. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ convergesse a una somma $S(x)$ uniformemente si avrebbe $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$.

Però dato $m\in\mathbb{N}$ si ha

$$S\left(\frac{1}{m}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{1}{m}\right) \geq \sum_{n=1}^{m^2} \frac{1}{m^2} e^{-2\frac{n}{m^2}} \geq \frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{m^2} e^{-2} = e^{-2} > 0$$

da cui $\boxed{n \le n^2 \Rightarrow \frac{n}{n^2} \le 1 \Rightarrow -2\frac{n}{n} \ge -2 \Rightarrow e^{-\frac{2n}{n^2}} \ge e^{-2}}$

$\lim_{n\to\infty} S\left(\frac{1}{n}\right) \ge e^{-2}$ che contrasta con $\lim_{x\to 0} S(x)=0$.

Dunque la conv. uniforme si ha se e solo se $\boxed{\alpha < 0}$

(b₂) (1) Vediamo la sommabilità delle norme $L_1(0,+\infty)$ di f_n:

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} n^\alpha x^2 e^{-2nx^2}\,dx = \int_0^{+\infty} n^\alpha \frac{y^2}{n} e^{-2y^2} \frac{dy}{\sqrt{n}} =$$

$$\left(y=\sqrt{n}\,x \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \int_0^{+\infty} n^{\alpha-3/2}\, y^2 e^{-2y^2}\,dy .$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}} < +\infty \iff \frac{3}{2}-\alpha > 1 \iff \alpha < \frac{1}{2}$$

e quindi per $\alpha < \frac{1}{2}$ la serie conv. in $L^1(0,+\infty)$. Viceversa vediamo che per $\alpha \ge \frac{1}{2}$ la serie non converge in L^1. Se convergesse infatti si avrebbe:

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}}\right)\int_0^{+\infty} y^2 e^{-2y^2}\,dy = +\infty$$

ASSURDO (qui conta il fatto che $f_n(x)\geq 0$ e quindi $|f_n(x)| = f_n(x)$)

(2) Facciamo gli stessi calcoli con $\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} f_n(x)^2\,dx}$.

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} n^{2\alpha} x^4 e^{-4nx^2}\,dx \underset{(y=\sqrt{n}x)}{=} \int_0^{+\infty} n^{2\alpha}\frac{y^4}{n^2} e^{-4y^2}\frac{dy}{\sqrt{n}} =$$

$$n^{2\alpha-\frac{5}{2}}\int_0^{+\infty} y^4 e^{-4y^2}\,dy \iff$$

$$\|f_n\|_2 = n^{\alpha-\frac{5}{4}}\sqrt{\int_0^{+\infty} y^4 e^{-4y^2}\,dy}.$$ Dato che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4-\alpha}} < +\infty \iff \frac{5}{4}-\alpha > 1 \iff \alpha < \frac{1}{4}$$

si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge sicuramente in L^2 se $\alpha < 1/4$

Dato che $0 < 1/4$ la serie con $\alpha = 0$ conv. in $L^2(0,+\infty)$.

(a.2) Calcoliamo prima l'integrale (nel senso del valore principale)

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3ix}}{x(x^2-2x+10)}\,dx = (*)$$. Posto $f(z) := \dfrac{e^{3iz}}{z(z^2-2z+10)}$ si

ho che $f(z)$ ha tre poli semplici – le radici del denominatore che sono $z_0 = 0$ e $z_{12} = 1 \pm 3i$. Per i metodi visti a lezione

$$(*) = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f, 1+3i) + \pi i \, \mathrm{Res}(f, 0) =$$

$$\pi i \left. \frac{e^{3zi}}{z^2 - 2z + 10} \right|_{z=0} + 2\pi i \left. \frac{e^{3zi}}{z(z-1+3i)} \right|_{z=1+3i} =$$

$$\frac{\pi i}{10} + 2\pi i \frac{e^{3i(1+3i)}}{(1+3i)\, 6i} = \frac{\pi i}{10} + \frac{\pi}{3} e^{-9} \frac{\cos(3) + i\sin(3)}{1+3i} \frac{(1-3i)}{1-3i} =$$

$$\frac{\pi i}{10} + \frac{\pi e^{-9}}{3 \cdot 10} \left\{ (\cos(3) + 3\sin(3)) + i(\sin(3) - 3\cos(3)) \right\}$$

Prendendone la parte immaginaria si perviene all'integrale richiesto:

$$\frac{\pi}{10} + \frac{\pi e^{-9}}{30} (\sin(3) - 3\cos(3)) \quad \#$$

(b.1) $$y'' - 2y' + 10y = \sin(2t)\, e^{-|t|} = b(t) \quad (\mathrm{I})$$

Passiamo all'equazione

$$y_1'' - 2y_1' + 10 y_1 = e^{2it} e^{-|t|} =: b_1(t) \quad (\mathrm{II})$$

Calcoliamo $\hat{b}_1(\omega) = \hat{b}(\omega - 2) = \dfrac{2}{1+(\omega-2)^2} = \dfrac{2}{\omega^2 - 4\omega + 5}$

Trasformando con Fourier la (II) si ottiene

$$\hat{y}_1(\omega)(-\omega^2 - 2i\omega + 10) = \frac{2}{\omega^2 - 4\omega + 5}$$

cioè

$$\hat{y}_1(\omega) = -\frac{2}{(\omega^2+2i\omega-10)(\omega^2-4\omega+5)} .$$

Posto $g(z) = \frac{-2e^{izt}}{(z^2+2iz-10)(z^2-4z+5)}$ si ha che $g(z)$ ha

4 poli semplici, che sono $3-i$, $-3-i$, $2+i$, $2-i$. Si ha:

$$\mathrm{Res}(g(z), 3-i) = \frac{-2e^{izt}}{(2z+2i)(z^2-4z+5)+(2z-4)(z^2+2iz-10)}\bigg|_{z=3-i}$$

$$= \frac{-2e^{(1+3i)t}}{6((3-i)^2-4(3-i)+5)} = -\frac{e^t}{3}\,\frac{\cos(3t)+i\sin(3t)}{1-2i} =$$

$$-\frac{e^t}{3}\left(\cos(3t)+i\sin(3t)\right)\frac{1+2i}{5} = -\frac{e^t}{15}\left[\left(\cos(3t)-2\sin(3t)\right)+i\left(2\cos(3t)+\sin(3t)\right)\right]$$

$$\mathrm{Res}(g(z), -3-i) = \frac{-2e^{izt}}{(2z+2i)(z^2-4z+5)+(2z-4)(z^2+2iz-10)}\bigg|_{z=-3-i}$$

$$= \frac{-2e^{(1-3i)t}}{(-6)((-3-i)^2-4(-3-i)+5)} = \frac{e^t}{3}\,\frac{\cos(3t)-i\sin(3t)}{25+10i} =$$

$$\frac{e^t}{15}\left(\cos(3t)-i\sin(3t)\right)\frac{5-2i}{29} = \frac{e^t}{435}\left[\left(5\cos(3t)-2\sin(3t)\right)-i\left(2\cos(3t)+5\sin(3t)\right)\right]$$

$$\mathrm{Res}(g(z),\ 2-i) = \left.\frac{-2e^{izt}}{(2z+2i)(z^2-4z+5)+(2z-4)(z^2+2iz-10)}\right|_{z=2-i}$$

$$= \frac{-2e^{(2i+1)t}}{(-2i)\left((2-i)^2+2i(2-i)-10\right)} = \frac{e^t\left(\cos(2t)+i\sin(2t)\right)}{i(-5)} =$$

$$= \frac{e^t}{5}\left(-\sin(2t)+i\cos(2t)\right)$$

$$\mathrm{Res}(g(z),\ 2+i) = \left.\frac{-2e^{izt}}{(2z+2i)(z^2-4z+5)+(2z-4)(z^2+2iz-10)}\right|_{z=2+i}$$

$$= \frac{-2e^{(2i-1)t}}{(2i)\left((2+i)^2+2i(2+i)-10\right)} = \frac{-e^{-t}\left(\cos(2t)+i\sin(2t)\right)}{i(-9+8i)} =$$

$$= \frac{-e^{-t}}{145}\left(\cos(2t)+i\sin(2t)\right)(-9-8i)(-i) = \frac{e^{-t}}{145}\Big\{\left(8\cos(2t)+9\sin(2t)\right)+$$

$$i\left(-9\cos(2t)+8\sin(2t)\right)\Big\}$$

DUNQUE

se $t>0$ $\quad y(t) = \mathrm{Im}\left(i\,\mathrm{Res}(g(z,\ 2+i)\right) = \dfrac{e^{-t}}{145}\left(8\cos(2t)+9\sin(2t)\right)$

mentre per $t<0$ si ha

$$y(t) = \Im m\left(-i\left[\operatorname{Res}(g(z), 3-i) + \operatorname{Res}(g(z), -3-i) + \operatorname{Res}(g(z), 2-i)\right]\right) =$$

$$\frac{e^{t}}{15}\left(\cos(3t) - 2\sin(3t)\right) - \frac{e^{t}}{435}\left(5\cos(3t) - 2\sin(3t)\right) + \frac{e^{t}}{5}\sin(2t) =$$

$$\frac{e^{t}}{5}\sin(2t) + \frac{e^{t}}{435}\left(24\cos(3t) - 56\sin(3t)\right)$$

IN DEFINITIVA

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}}{145}\left(8\cos(2t) + 9\sin(2t)\right) & \text{se } t \geq 0 \\[2ex] \dfrac{e^{t}}{5}\sin(2t) + \dfrac{e^{t}}{435}\left(24\cos(3t) - 56\sin(3t)\right) & \text{se } t \leq 0 \end{cases}}$$

(C.1) $\begin{cases} y'' - 4y' + 20y = f \\ y(t) = 0 \text{ su }]-\infty, 0[\end{cases}$ Usiamo Laplace:

$$\check{y}(z)(z^2 - 4z + 20) = \check{f}(z)$$

(1) se $f = \delta \Rightarrow \check{f} = 1 \Rightarrow$

$$\check{y}(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 20} \Longrightarrow \text{posto } g(z) = \frac{e^{zt}}{z^2 - 4z + 20}$$

i poli di $g(z)$ sono $z_{1,2} = 2 \pm 4i$ (semplici) e, sulle $t > 0$

$$y(t) = \text{Res}(g(z), 2+4i) + \text{Res}(2-4i) = 2\,\text{Re}\left(\text{Res}(g(z), 2+4i)\right) =$$

$$2\,\text{Re}\left(\frac{e^{zt}}{z-2+4i}\Big|_{z=2+4i}\right) = 2\,\text{Re}\left(\frac{e^{(2+4i)t}}{8i}\right) =$$

$$\frac{e^{2t}}{4}\text{Re}\left(\frac{\cos(4t) + i\sin(4t)}{i}\right) = \frac{e^{2t}\sin(4t)}{4}$$

$$\Rightarrow y(t) = \boxed{\frac{H(t)}{4} e^{2t}\sin(4t)}$$

(2) Se $f(t) = H(t)\sin(t) \Rightarrow \check{f}(z) = \frac{1}{z^2+1} \Rightarrow$

$$\check{y}(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4z+20)}$$. Pongo $$g(z) = \frac{e^{zt}}{(z^2+1)(z^2-4z+20)}$$

Ora i poli sono $\pm i$ e $2 \pm 4i$ e i corrispondenti residui

$$\mathrm{Res}(g(z), i) = \left.\frac{e^{zt}}{2z(z^2-4z+20)+(2z-4)(z^2+1)}\right|_{z=i} =$$

$$= \frac{e^{it}}{2i(i^2-4i+20)} = \frac{e^{it}}{2(4+19i)} = \frac{\cos(t)+i\sin(t)}{754}(4-19i) =$$

$$= \frac{4\cos(t)+19\sin(t)+i(-19\cos(t)+4\sin(t))}{754}$$

$$\mathrm{Res}(g(z), 2+4i) = \left.\frac{e^{zt}}{2z(z^2-4z+20)+(2z-4)(z^2+1)}\right|_{z=2+4i} =$$

$$= \frac{e^{(2+4i)t}}{(8i)((2+4i)^2+1)} = \frac{e^{2t}e^{4it}}{8i(-11+16i)} = \frac{e^{2t}}{3016}(\cos(4t)+i\sin(4t))(-16+11i)$$

$$= \frac{e^{2t}}{3016}\left[(-16\cos(4t)-11\sin(4t))+i(11\cos(4t)-16\sin(4t))\right]$$

DUNQUE, se $t>0$, $y(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Res}(g(z), i) + \mathrm{Res}(g(z), 2+4i)\right) =$

$$= \frac{1}{377}\left(4\cos(t)+19\sin(t)\right) - \frac{e^{2t}}{1508}\left(16\cos(4t)+11\sin(4t)\right)$$

e $v(t) = 0$ per $x < 0$, da cui, volendo, si può scrivere:

$$\boxed{v(t) = H(t)\left\{\left(\frac{4\cos(t)+19\sin(t)}{377}\right) - \frac{e^{2t}}{1508}\left(16\cos(4t)+11\sin(4t)\right)\right\}}$$

(C.2)

$$(t^2-1)u = 1$$

Come noto $u = u_0 + \bar{u}$ dove $\bar{u}$ è una soluzione (da trovare in qualche modo) e u_0 è una qualunque soluzione di

$$(t^2-1)u_0 = 0$$

che sappiamo essere della forma $u_0 = c_1\delta_1 + c_2\delta_{-1}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$(\delta_a = \delta(t-a)$ è la delta concentrata in a: $\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a))$

Per trovare $\bar{u}$ ragioniamo in modo euristico: "moralmente"

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right).$$

Questo suggerisce che

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(\text{v.p.})\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}(\text{v.p.})\frac{1}{t+1}$$

VERIFICHIAMO CHE TALE $\bar{u}$ va bene:

$$(t^2-1)\,\bar{u} = \frac{(t-1)(t+1)}{2}\left((\text{v.p.})\frac{1}{t-1} - (\text{v.p.})\frac{1}{t+1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}(t+1)\underbrace{(t-1)(\text{v.p.})\frac{1}{t-1}}_{=1} - \frac{1}{2}(t-1)\underbrace{(t+1)(\text{v.p.})\frac{1}{t+1}}_{=1} = \frac{1}{2}(t+1-t+1) = 1$$

per le proprietà del valore principale

DUNQUE:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\text{v.p.}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\text{v.p.}\frac{1}{t+1} + c_1\delta_1 + c_2\delta_{-1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

(B) $(1+t^2)\,u = \delta$.

Come nel caso (A) dobbiamo trovare una sol. particolare $\bar{u}$ e tutte le a. soluzioni di $(1+t^2)\,u_0 = 0$. Dato che $1+t^2$ non ha radici, l'unica u_0 possibile è $u_0 = 0$. $\Rightarrow \exists$ uno solo u che risolve il problema. Per trovare $u = \bar{u}$ moltiplichiamo l'equazione per $\frac{1}{1+t^2} \in C^\infty$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{1+t^2}\,\delta \iff \boxed{u = \delta}$$

e questa è l'unica sol. possibile.