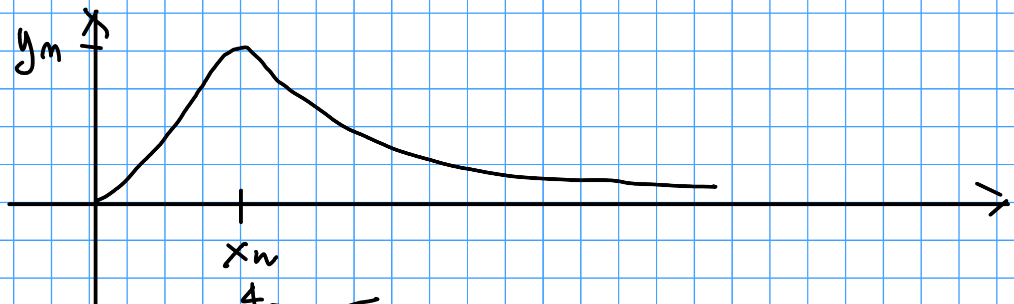
(1) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^4}$ $\qquad f_n(0) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$$f_n'(x) = \frac{n^2 + x^4 - x(4x^3)}{(n^2+x^4)^2} = \frac{n^2 - 3x^4}{(n^2+x^4)^2}.$$ Allora $f_n'(x) = 0 \iff x = x_n := \sqrt[4]{\dfrac{n^2}{3}}$

$= \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{3}}$. Calcoliamo $f_n(x_n) = \dfrac{\sqrt{n}}{3^{1/4}} \dfrac{1}{n^2 + \frac{n^2}{3}} = \dfrac{3^{3/4}}{4} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{3^{3/4}}{4 n^{3/2}}$ $(=: y_n)$

$\Rightarrow$ il grafico delle f_n:



Quindi (a) $\|f_n\|_\infty = y_n = \dfrac{\sqrt[4]{27}}{4\sqrt{n^3}}$.

(b) È chiaro che, a $x \neq 0$ fissato, $\dfrac{x}{n^2+x^4} \simeq \dfrac{1}{n^2}$. Ne segue che $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è convergente $\forall x \neq 0$ (e anche per $x=0$, caso ovvio).

(c) Dato che $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \dfrac{\sqrt[4]{27}}{4} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}} < +\infty$ $\left(\dfrac{3}{2} > 1 \,!!\right)$ $\Rightarrow$ la serie f_n conv. TOTALMENTE $\Rightarrow$ conv. UNIF. $\Rightarrow$ la somma è continua.

(d) Calcoliamo le norme L^1: $\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^4}\,dx$

Conviene usare il cambio di variabile $x^4 = n^2 y^4 \iff x = \sqrt{n}\,y \implies$ $dx = \sqrt{n}\,dy$ da cui

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\,y}{n^2+n^2y^4}\sqrt{n}\,dy = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{y}{1+y^4}\,dy = \frac{C}{n}.$$

Si vede allora che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 = +\infty$. QUESTO SUGGERISCE CHE la serie non converge L^1 (ma non è una dim.). Notiamo che $f_n(x) \geq 0$. Se la serie convergesse in L^1, cioè se esistesse f in $L^1([0,+\infty[)$ con $f \underset{L^1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ne seguirebbe

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\sum_1^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_1^{\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_1^{\infty}\frac{C}{n} = +\infty \quad \underline{\text{ASSURDO}}$$

Quindi la serie <u>NON</u> converge in L^1

(e) Calcoliamo la norma $\|f_n\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} (f_n(x))^2\,dx\right)^{1/2}$.

Con la stessa sostituzione $x = \sqrt{n}\,y \implies dx = \sqrt{n}\,y$ si ha

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(n^2+x^4)^2}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{n\,y^2}{n^4(1+y^4)^2}\sqrt{n}\,dy =$$

$$= \frac{1}{n^{5/2}}\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{(1+y^4)^4}\,dy \implies \|f_n\|_2 = \frac{1}{n^{5/4}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{(1+y^4)^2}\,dy\right)^{1/2} = \frac{D}{n^{5/4}}$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}} < +\infty \Rightarrow$ la serie conv. assolutamente in $L^2 \Rightarrow$

<u>converge</u> in L^2

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x+x^2+x^3}\, dx = (I)$ il denominatore ha come radici -1, $\pm i$. Questo si può vedere usando $(x^4+1) = (x+1)(x^3+x^2+x+1)$ e notando che $x^4=-1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \quad x = \pm i$

Allora $(I) = \frac{2\pi i}{1-e^{\pi i}} \left(Res(f,-1) + Res(f,i) + Res(f,-i) \right)$

dove $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1+z+z^2+z^3}$ e $\sqrt{\rho e^{i\theta}} = \sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2}$ per $0 < \theta < 2\pi$

Allora

$$Res(f,-1) = \frac{\sqrt{z}}{1+2z+3z^2}\Big|_{z=-1} = \frac{\sqrt{e^{\pi i}}}{1-2+3} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{2} = \frac{i}{2}$$

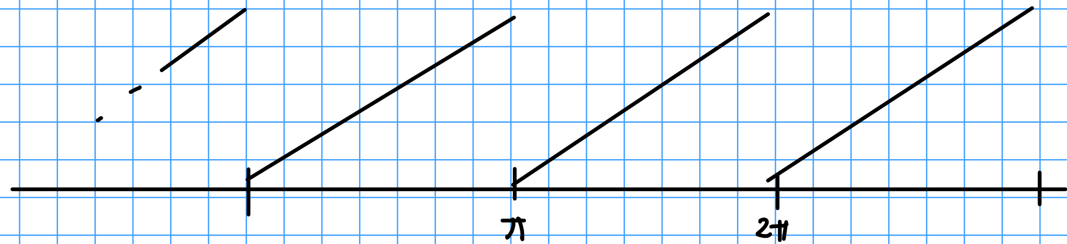
$$Res(f,i) = \frac{\sqrt{z}}{1+2z+3z^2}\Big|_{z=i} = \frac{\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}i}}}{1+2i-3} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{2(-1+i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1+i}{-1+i} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{-(1+i)^2}{2}$$

$$= \frac{-i}{2\sqrt{2}}$$

$$Res(f,i) = \frac{\sqrt{z}}{1+2z+3z^2}\Big|_{z=i} = \frac{\sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}i}}}{1-2i-3} = \frac{e^{\frac{3\pi}{4}i}}{2(-1-i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{-1+i}{-1-i} = \frac{(-1+i)^2}{2\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{-i}{2\sqrt{2}}$$

e quindi $(I) = \frac{2\pi i}{2}\left(\frac{i}{2} - \frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = \pi i \left(\frac{2i - \sqrt{2}i - \sqrt{2}i}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)}$

(3) $f(t) = t$ su $[0, \pi]$



$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\, dt = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

e se $n \geq 1$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \cos(2nt)\, dt = \left[t\,(\sin(2nt))\,\frac{1}{2n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi} \sin(2nt)\, dt =$

$= \frac{\pi}{2n}\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} - \underbrace{\left[\frac{\cos(2nt)}{4n^2}\right]_0^{\pi}}_{=0} = 0$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \sin(2nt)\, dt = \left[t\,(-\cos(2nt))\,\frac{1}{2n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi} \cos(2nt)\, dt =$

$-\frac{\pi}{2n}\cos(2n\pi) + \underbrace{\left[\frac{\sin(2nt)}{4n^2}\right]_0^{\pi}}_{=0} = -\frac{\pi}{2n}$

(4) Chiamiamo "serie di potenze" una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ dove $z_0 \in \mathbb{C}$, (a_n) è una successione in $\mathbb{C}$ e z è un parametro variabile in $\mathbb{C}$. Se si pone:

$$\ell := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{e} \quad R := \frac{1}{\ell} \quad (=0 \text{ se } \ell = +\infty, \ =+\infty \text{ se } \ell = 0)$$

si ha che

- la serie converge (assolutamente) quando $|z-z_0| < R$
- la serie non converge quando $|z-z_0| > R$

Non si può dire nulla - in generale - di ciò che accade se $|z-z_0| = R$.

Volendo si può anche dire che la serie di funzioni

- converge totalmente ($\Rightarrow$ unif.) su ogni disco $\{|z-z_0| \leq R'\}$ quando $R' < R$.