L.S. in Ingegneria Energetica/Elettrica/Nucleare. Corso di Complementi di Matematica.
Esempio di seconda parte del compito 2011.

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - y' + 2y = f$$

   (a) Sia $f(t) = e^{-2|t|}$; si trovi la soluzione $y(t)$ con la condizione

   $$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} y'(t) = 0.$$

   (12 p.)

   (b) Sia $f = \delta$; si trovino tutte le soluzioni y in $\mathcal{S}'$ (distribuzioni temperate) (8 p.).

   (c) Sia $f = \delta$; si trovi la soluzione $y(t)$ con la condizione

   $$y(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

   (7p.)

2. Sia $f(t) := H(t)\cos(t)$. Si calcolino (eventualmente nel senso delle distribuzioni)

   (a) la trasformata di Laplace di f (3p.);

   (b) l'espressione $f'' + f$ (4p.).

1a) Cerchiamo sol. di $y'' - y' + 2y = f$ con $y \in L^2 \Rightarrow$ usiamo Fourier.

Se $f(t) = e^{-2|t|}$ allora:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} e^{-i\omega t} dt =$$

$$\left[\frac{e^{(2-i\omega)t}}{2-i\omega} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(2+i\omega)t}}{-(2+i\omega)} \right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2-i\omega} + \frac{1}{2+i\omega} = \frac{4}{4+\omega^2}.$$

Trasformando con Fourier l'equazione:

$$(-\omega^2 - i\omega + 2)\,\hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega) \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{-4}{(\omega^2 + i\omega - 2)(\omega^2+4)}$$

La funzione scritta sopra è $L^2(\mathbb{R})$ dato che il denominatore non ha radici reali. Le radici in effetti sono $\pm 2i$ e $\frac{-i \pm \sqrt{7}}{2}$, che sono tutte semplici.
Per trovare $y(t)$ usiamo il metodo dei residui: posto $g(z) := \frac{-4e^{izt}}{(z^2+iz-2)(z^2+4)}$

si ha (non trascrivo i calcoli..)

$$\mathrm{Res}(g(z), 2i) = \frac{-i}{8} e^{-2t}$$

$$\mathrm{Res}(g(z), -2i) = \frac{i e^{2t}}{4}$$

$$\mathrm{Res}\left(g(z), \frac{-i+\sqrt{7}}{2}\right) = -\frac{(11\sqrt{7}+7i)}{112} e^{\frac{\sqrt{7}}{2}it} e^{\frac{t}{2}}$$

$$\mathrm{Res}\left(g(z), \frac{-i-\sqrt{7}}{2}\right) = -\frac{(-11\sqrt{7}+7i)}{112} e^{-\frac{\sqrt{7}}{2}it} e^{\frac{t}{2}}.$$

Ne segue

$$y(t) = \begin{cases} i\,\mathrm{Res}(2i) = \frac{1}{8} e^{-2t} & \text{se } t>0 \\ (-i)\left(\mathrm{Res}(-2i) + \mathrm{Res}\left(\frac{-i+\sqrt{7}}{2}\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{-i-\sqrt{7}}{2}\right)\right) = \frac{e^{2t}}{4} - \frac{7\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + 11\sqrt{7}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)}{56} e^{t/2}, & \text{se } t<0 \end{cases}$$

1b) Dato che $\hat{\delta} = 1$, trasformando con Fourier l'equazione, si trova

$\hat{y}(\omega) = \dfrac{-1}{\omega^2 + i\omega - 2}$. Posto $g(z) = \dfrac{-e^{izt}}{z^2+iz-2}$ si ha

$$\mathrm{Res}\left(g(z), \frac{-i+\sqrt{7}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{7} e^{\frac{t}{2}} e^{\frac{\sqrt{7}}{2}it}$$

$$\mathrm{Res}\left(g(z), \frac{-i-\sqrt{7}}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{7} e^{\frac{t}{2}} e^{-\frac{\sqrt{7}}{2}it}$$ da cui

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t>0 \\ -\frac{2\sqrt{7}}{7} e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) & \text{se } t<0 \end{cases}$$

(2c) Per risolvere il problema con dato nullo prima di zero usiamo la trasformata di Laplace. Dato che $\mathcal{L}(\delta)=1$ si ha

$$(z^2-z+2)\mathcal{L}(y)=1 \iff \mathcal{L}(y)(z)=\frac{1}{z^2-z+2}$$

Ne segue che, per $t>0$, posto $g(z)=\dfrac{e^{zt}}{z^2-z+2}$ (che ha due poli semplici $\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$)

$$y(t)=\operatorname{Res}\left(g(z),\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)+\operatorname{Res}\left(g(z),\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)=2\operatorname{Re}\left(\operatorname{Res}\left(g(z),\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)\right)=$$

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{e^{zt}}{2z-1}\bigg|_{z=\frac{1+\sqrt{7}i}{2}}\right)=2\operatorname{Re}\frac{e^{\frac{t}{2}}e^{\frac{i\sqrt{7}t}{2}}}{\sqrt{7}i}=\frac{2\sqrt{7}}{7}e^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

cioè
$$\boxed{y(t)=H(t)\frac{2}{7}\sqrt{7}\,e^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)}$$

(2) Se $f(t)=H(t)\cos(t) \Rightarrow$

a) $$\mathcal{L}(f)(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}H(t)\cos(t)e^{-zt}\,dt=\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-zt}\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{it-zt}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-it-zt}\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{(i-z)t}}{i-z}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(i+z)t}}{-(i+z)}\right]_0^{+\infty}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)=\boxed{\frac{z}{z^2+1}}$$

(b) $f(t)=H(t)\cos(t) \Rightarrow$

$$f'(t)=\delta(t)\cos(t)-H(t)\sin(t)=\delta(t)-H(t)\sin(t)\Rightarrow$$

$$f''(t)=\delta'(t)-\delta(t)\sin(t)-H(t)\cos(t)=\delta'(t)-H(t)\cos(t)\Rightarrow \boxed{f''+f=\delta'}$$