Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 13 settembre 2010

(a.1) Date le funzioni $f_n : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) := \frac{n^\alpha \sqrt{x}}{(5+nx^3)}$$

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente su $[0,+\infty[$.
2. Si determini se per i valori di α trovati al punto precedente la somma $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ della serie è continua su $]0,+\infty[$.
3. $(*)$ Si dica per quali α (tra quelli trovati al punto 1) la somma $S(x)$ è continua in $x=0$.
   Per questo può essere utile ricordare che, se $\beta<1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ diverge come $n^{1-\beta}$, più precisamente:
   $$\lim_{m\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^\beta}}{n^{1-\beta}} = \frac{1}{1-\beta} \quad \text{e cioè} \quad \frac{\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^\beta}}{n^{1-\beta}} \simeq \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta}$$

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+3)(x^2+1)}\,dx$$

(b.1) Data la successione di funzioni dell'esercizio (a.1)

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0,+\infty[)$.
2. Si dica se per $\alpha=-1$ la serie converge in $L^2(]0,+\infty[)$.
3. $(*)$ Si dica per quali $\alpha>0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0,1])$.

(b.2) Si trovi la soluzione del problema differenziale di $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y''-4y'+3y=e^{-|t|} \\ y\in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

(c.1) Si trovi la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y''-4y'+3y=\delta \\ y=0 \text{ su }]-\infty,0[\end{cases}$$

e trovata la soluzione y si calcolino y' e y''.

(c.2) Utilizzando la trasformata di Fourier si trovino tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} y''+y'+y=\delta \\ y\in \mathcal{S}' \end{cases}$$

e di

$$\begin{cases} y''+y'+y=\delta' \\ y\in \mathcal{S}' \end{cases}$$

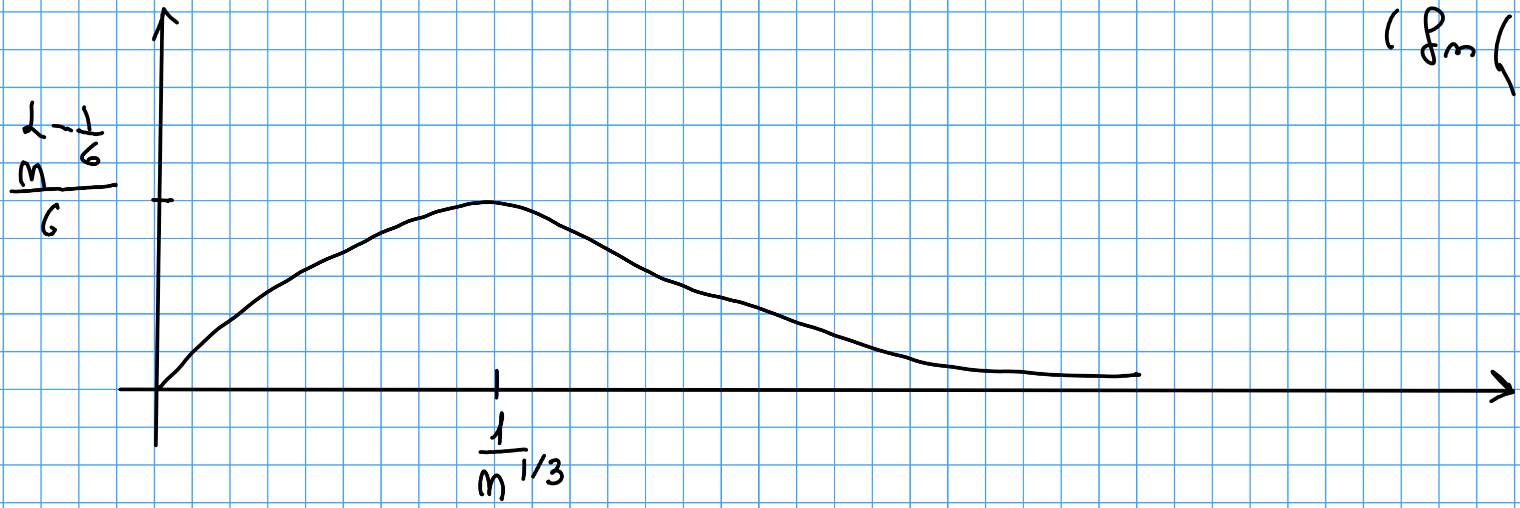
(a.1) $\quad f_n(x) = \dfrac{n^\alpha \sqrt{x}}{5 + n x^3}$ per $x \geq 0$. Allora $f_n(0)=0$

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0 \qquad f_n(0) = 0$$

$$f_n'(x) = n^\alpha \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5+nx^3) - \sqrt{x}\, 3nx^2}{(5+nx^3)^2} = n^\alpha \frac{5+nx^3-6nx^3}{2\sqrt{x}(5+nx^3)^2} = \frac{5n^\alpha(1-nx^3)}{2\sqrt{x}(5+nx^3)^2}$$

per cui $f_n'(x) = 0 \iff x = x_n =: \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Ne risulta il grafico

$$\left(f_n\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right) = \frac{n^\alpha}{n^{1/6}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{n^{\alpha - 1/6}}{6} \right)$$



Inoltre, fissato $x \geq 0$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1, \text{ e se } x = 0 \text{ per ogni } \alpha; \\ \frac{\sqrt{x}}{x^3} & \text{se } \alpha = 1 \text{ e } x > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \text{ e } x > 0 \end{cases}$$

Dato che ci interessa la conv. della serie possiamo restringerci a

$\alpha < 1$ per quanto riguarda la conv. puntuale (e ad $\alpha - \frac{1}{6} < 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{6}$ per l'eventuale conv. uniforme).

[1] Dato che $f_n(x) \simeq \frac{n^\alpha}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ per le $x \neq 0$, ne segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (cioè la serie conv. punt.) se e solo se

$1-\alpha > 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha < 0}$

[2] Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per lo studio del grafico di f_n si ha

$\|f_n\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} = \max_{x \geq \varepsilon} |f_n(x)| = f_n(\varepsilon)$, per n abbastanza grande.

Dato che (per il punto 1), $f_n(\varepsilon) \simeq \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ si ha che per $\alpha < 0$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, [\varepsilon, \infty[}$ è conv. Dunque per $\boxed{\alpha < 0}$ la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ conv. unif. alla sua somma $S(x)$ e (proprietà della conv unif.) $\Rightarrow$ $S(x)$ è continua su $[\varepsilon, +\infty[$. Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $S(x)$ è continua su $]0, +\infty[$ (manca $x=0$!).

[3] Per lo studio dei grafici fatto all'inizio è chiaro che

$\|f_n\|_{\infty}$ (su tutto $[0, +\infty[$) $= \frac{1}{6} \frac{1}{n^{1/6-\alpha}}$. Ne segue che se

$\frac{1}{6} - \alpha > 1 \Leftrightarrow -\frac{5}{6} > \alpha$ la serie conv. totalmente ($\Rightarrow$ unif.) e di conseguenza la $S(x)$ è continua anche in zero. Proviamo, viceversa, che per $\alpha \geq -\frac{5}{6}$ la S non è continua in zero; ne segue che $\boxed{\alpha < -5/6}$ è necessaria e suff. per la continuità di S su $[0, +\infty[$.

In effetti: se $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$S\left(\frac{1}{m}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha \sqrt{1/m}}{5 + \frac{n}{m^3}} \geq \sum_{n=1}^{m^3} \frac{n^\alpha}{\sqrt{m}} \frac{1}{5 + \frac{n}{m^3}} \geq \frac{1}{6\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{m^3} n^\alpha$$

$$\underset{(\beta = -\alpha)}{\simeq} \frac{1}{6\sqrt{m}} \frac{1}{1+\alpha} \left(m^3\right)^{1+\alpha} = \frac{1}{6(1+\alpha)} m^{3+3\alpha-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6(1+\alpha)} m^{\frac{5}{2}+3\alpha}$$

L'ultima espressione NON tende a zero se $\frac{5}{2} + 3\alpha \geq 0$ cioè se $\alpha \geq -\frac{5}{6}$!

(a.2) $$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{(x+3)(x^2+1)}}_{f(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{\pi i}} \left(\operatorname{Res}(f, -3) + \operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i) \right) = (*)$$

(con l'opportuna determinazione della radice)

$$\operatorname{Res}(f, -3) = \frac{\sqrt{-3}}{(-3)^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}\, i}{10}$$

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{\sqrt{i}}{(i+3)(i+i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+i}{(i+3)2i} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(1+i)(3-i)(-i)}{10} =$$

$$\frac{1}{20\sqrt{2}}(4+2i)(-i)$$

$$\mathrm{Res}(f,-i)=\frac{\sqrt{-i}}{(-i+3)(-i-i)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1+i}{(-i+3)(-2i)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(-1+i)(3+i)(i)}{10}=$$

$$\frac{1}{20\sqrt{2}}(4-2i)(-i)$$

DUNQUE

$$(*)=\pi i\left(-\frac{\sqrt{3}}{10}+\frac{1}{\sqrt{2}\,20}(4+\cancel{2i})+\frac{1}{\sqrt{2}\,20}(4-\cancel{2i})\right)(-i)=$$

$$\pi\left(-\frac{\sqrt{3}}{10}+\frac{4}{\sqrt{2}\,10}\right)=\boxed{\frac{\pi}{10}\left(\frac{-\sqrt{6}+4}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{20}\left(-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)}$$

(b.1) 1 Calcoliamo $\|f_n\|_{L^1([0,+\infty[)}$:

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,dx=\left(y=\sqrt[3]{n}\,x\Rightarrow nx^3=y^3,\ dx=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}dy\right)$$

$$n^{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{y/n^{1/3}}}{(5+y^3)}\frac{dy}{n^{1/3}}=n^{\alpha-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{y}}{(5+y^3)}dy}_{C}=\frac{C}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$

Se ne deduce che $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_{L^1}<+\infty \iff \frac{1}{2}-\alpha>1 \iff \boxed{\alpha<-\frac{1}{2}}$

D'altra parte, essendo le $f_n \geq 0$, se la serie $\sum f_n$ conv. in L^1

si deve avere

$$\mathbb{R} \ni \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\, dx = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2-\alpha}}$$

per cui la condizione $\alpha < -\frac{1}{2}$ è anche necessaria.

(2) Calcoliamo le norme L_2 : (uso la stessa sostituzione)

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \frac{n^{2\alpha} \, y/\sqrt[3]{n}}{(5+y^3)^2} \frac{dy}{\sqrt[3]{n}} = n^{2\alpha-\frac{2}{3}} \underbrace{\int \frac{y}{(5+y^3)^2}\, dy}_{c_1} \Rightarrow$$

$$\|f_n\|_2 = n^{\alpha-\frac{1}{3}} \sqrt{c_1}$$ da cui $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{2}{3}$

Dato che $-1 < -\frac{2}{3}$ $\rightarrow$ la serie conv. in L^2

(3) Calcoliamo la $\|f_n\|_1$ rispetto all'intervallo $[0,1]$:

$$\int_0^1 |f_n(x)|\, dx = n^{\alpha-1/2} \int_0^{\sqrt[3]{n}} \frac{\sqrt{y}}{5+y^3}\, dy .$$

Notiamo che $c_n = \int_0^{\sqrt[3]{n}} \frac{\sqrt{y}}{5+y^3}\, dy \longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{5+y^3} =: c \quad (c>0)$

si ha che $\|f_n\|_{L^1([0,1])} \simeq \frac{c}{n^{1/2-\alpha}}$. Quindi si può ragionare

Come nel punto ①, otteniamo $\boxed{\alpha < -1/2}$

(b.2)

$$y'' - 4y' + 3y = e^{-|t|}.$$ Usiamo Fourier

Come noto $\mathcal{F}(e^{-|t|})(\omega) = \dfrac{2}{\omega^2+1}$. Dunque

$$(-\omega^2 - 4i\omega + 3)\,\hat{y}(\omega) = \frac{2}{\omega^2+1} \iff$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{-2}{(\omega^2+4i\omega-3)(\omega^2+1)} = \frac{-2}{(\omega+i)^2(\omega-i)(\omega+3i)}$$

Poniamo $g(z) = \dfrac{-2e^{itz}}{(z+i)^2(z-i)(z+3i)}$. Si ha:

$$\mathrm{Res}(g, i) = \left.\frac{-2e^{itz}}{(z+i)^2(z+3i)}\right|_{z=i} = \frac{-2e^{-t}}{(2i)^2\,4i} = \boxed{\frac{e^{-t}}{8i}}$$

$$\mathrm{Res}(g, -3i) = \left.\frac{-2e^{itz}}{(z+i)^2(z-i)}\right|_{z=-3i} = \frac{-2e^{3t}}{(-2i)^2(-4i)} = \boxed{\frac{e^{3t}}{8(-i)}}$$

$$\text{Res}(g, -i) = \frac{d}{dz} \frac{-2e^{itz}}{(z-i)(z+3i)} \Bigg|_{z=-i} =$$

$$\frac{-2ite^{itz}(z-i)(z+3i) + 2e^{itz}[z+3i+z-i]}{(z-i)^2(z+3i)^2} \Bigg|_{z=-i} =$$

$$e^{t} \frac{-2it(-2i)(2i) + 2(-i+3i-i-i)}{(-2i)^2(2i)^2} = \frac{-8ite^{t}}{16} = \boxed{\frac{-te^{t}}{2(-i)}} \text{. DUNQUE}$$

$$y(t) = \begin{cases} i\,\text{Res}(g, i) = \dfrac{e^{-t}}{8} & \text{per } t \geq 0 \\ (-i)\left(\text{Res}(g,-i) + \text{Res}(g,-3i)\right) = \dfrac{e^{3t}}{8} - \dfrac{te^{t}}{2} & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

(C.1) $\quad y'' - 4y' + 3y = \delta \qquad$ Usiamo Laplace:

$y(t) = 0$ per $t < 0$

$$(z^2-4z+3)\,\check{u}(z)=1 \iff \check{u}(z)=\frac{1}{z^2-4z+3}$$

Le radici di z^2-4z+3 sono $z=1$, $z=3$ $\Rightarrow$ se $t>0$

$$y(t)=\operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2-4z+3},1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2-4z+3},3\right)=$$

$$\left.\frac{e^{zt}}{2z-4}\right|_{z=1}+\left.\frac{e^{zt}}{2z-4}\right|_{z=3}=-\frac{e^{t}}{2}+\frac{e^{3t}}{2}=$$

Dunque $y(t)=\frac{H(t)}{2}\left(e^{3t}-e^{t}\right)$. . Allora

$$y'(t)=\frac{\delta}{2}\left(\underbrace{e^{3t}-e^{t}}_{=0}\right)+\frac{H(t)}{2}\left(3e^{3t}-e^{t}\right)=\frac{H(t)}{2}\left(3e^{3t}-e^{t}\right)$$

$$y''(t)=\frac{\delta}{2}\left(\underbrace{3e^{3t}-e^{t}}_{\text{vale 2 se } t=0}\right)+\frac{H(t)}{2}\left(9e^{3t}-e^{t}\right)=\delta+\frac{H(t)}{2}\left(9e^{3t}-e^{t}\right)$$

(c.2) $y''+y'+y=\delta$, $y\in\mathcal{S}'$. Usando Fourier:

$$(-\omega^2+i\omega+1)\,\hat{y}=1.$$

Dato che $-\omega^2 + i\omega + 1 = 0 \iff \omega = \dfrac{-i \pm \sqrt{-1+4}}{-2} = \dfrac{\pm\sqrt{3} + i}{2} \notin \mathbb{R}$

posso scrivere $\hat{y}(\omega) = \dfrac{-1}{\omega^2 - i\omega - 1}$ (che è una funzione L^2) e

antitrasformare con i residui: posto $g(z) = \dfrac{-e^{itz}}{z^2 - iz - 1}$

$$\mathrm{Res}\left(g, \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = \left.\frac{-e^{itz}}{2z - i}\right|_{z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{3}} e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)t}}$$

$$\mathrm{Res}\left(g, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right) = \left.\frac{-e^{itz}}{2z - i}\right|_{z = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)t}}$$

. DUNQUE $y(t) = 0$ se $t < 0$, (le radici hanno parte imm. positiva), mentre per $t > 0$

$$y(t) = i\,(\text{somma dei residui}) = \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}}\left(-e^{\frac{\sqrt{3}}{2} it} + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} it}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$$

$\Rightarrow y(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} H(t) e^{-t/2} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} t\right)$. PER LA SECONDA EQ. dato che il dato δ' è la derivata di δ, basta derivare la sol. precedente, ottenendo:

$$v(t) = y'(t) = \underbrace{\cancel{\frac{2}{\sqrt{3}} \delta\, e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)}}_{=0} + \frac{2}{\sqrt{3}} H(t)\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-t/2} + \frac{2}{3} H(t) e^{-t/2} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) = H(t) e^{-t/2}\left(-\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}{\sqrt{3}} + \frac{\cos\left(\right.}{2}\right)$$