Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 19 luglio 2010

(a.1) Date le funzioni $f_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) := \frac{\sqrt{x}}{n^\alpha(3 + nx^2)}$$

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente su $[0, +\infty[$.
2. Si determini se per i valori di α trovati al punto precedente la somma $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ della serie è continua su $]0, +\infty[$.
3. $(*)$ Si dica per quali α (tra quelli trovati al punto 1) la somma $S(x)$ è continua in $x = 0$.
   Per questo è utile ricordare che, se $\beta < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ diverge come $n^{1-\beta}$, più precisamente:
   $$\lim_{m \to +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^\beta}}{n^{1-\beta}} = \frac{1}{1-\beta} \quad \text{e cioè} \quad \frac{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^\beta}}{n^{1-\beta}} \simeq \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta}$$

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+2)(x^2+1)}\, dx$$

(b.1) Data la successione di funzioni dell'esercizio (a.1)

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0, +\infty[)$.
2. Si dica se per $\alpha = \frac{1}{4}$ la serie converge in $L^2(]0, +\infty[)$.
3. $(*)$ Si dica per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0, 1])$.

(b.2) Si trovi la soluzione del problema differenziale di $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^{-2|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

(c.1) Si trovi la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = \delta \\ y = 0 \text{ su }] - \infty, 0[\end{cases}$$

e trovata la soluzione y si calcolino y' e y''.

(c.2) Utilizzando la trasformata di Fourier si trovino tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} y'' + 4y = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

e di

$$\begin{cases} y'' + 4y = \delta' \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

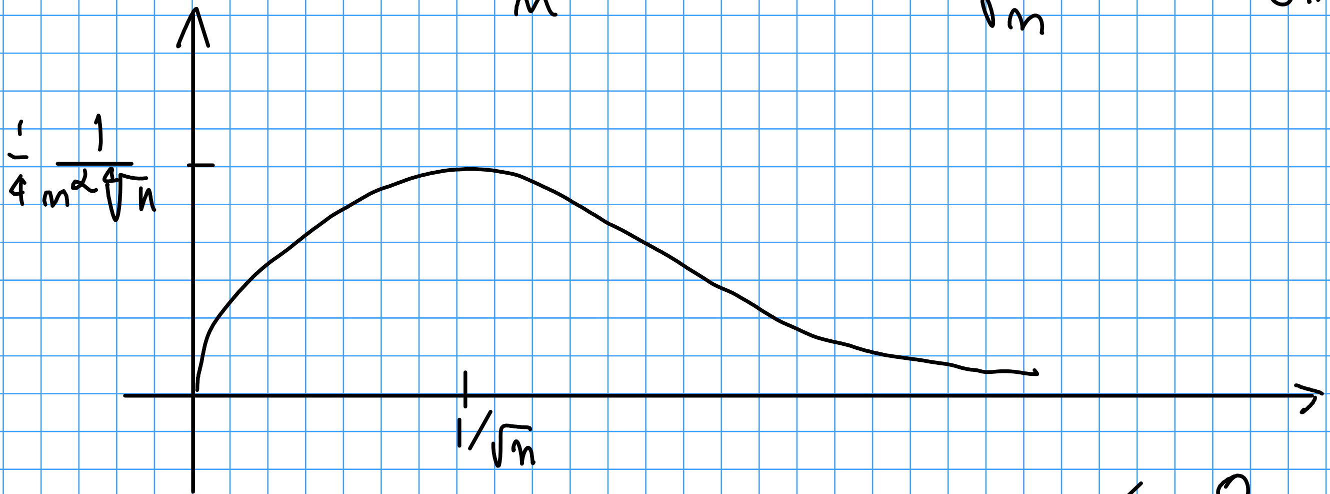
(e.1) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{n^\alpha(3+nx^2)}$ $(n \geq 1)$

Studiamo le f_n su $[0,+\infty[$. Si ha $f_n(0)=0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^\alpha} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3+nx^2) - \sqrt{x}(2nx)}{(3+nx^2)^2} = \frac{1}{n^\alpha}\frac{3+nx^2-4nx^2}{2\sqrt{x}(3+nx^2)^2}$$

$$= \frac{3-3nx^2}{2n^\alpha\sqrt{x}(3+nx^2)^2}.$$ Allora $f_n'(x)=0 \iff$

$x^2 = \frac{1}{n} \iff x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{n^\alpha \, 4} = \frac{1}{4}\frac{1}{n^{\alpha+1/4}}$



INOLTRE $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \text{ e } \alpha\in\mathbb{R} \\ 0 & \text{se } x>0 \text{ e } \alpha>-1 \\ \frac{1}{x\sqrt{x}} & \text{se } x>0 \text{ e } \alpha=-1 \\ +\infty & \text{se } x>0 \text{ e } \alpha<-1 \end{cases}$

- Dall'ultima proprietà segue che la f_n tende puntualmente a zero se $\alpha > -1$, tende puntualmente a $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $f(0)=0$ per $\alpha = -1$ e non ha limite puntuale su $[0, +\infty[$ se $\alpha < -1$ (in questo caso converge solo in $x = 0$).

DUNQUE la conv. puntuale si ha $\Leftrightarrow$ $\boxed{\alpha \geq -1}$

- Passiamo alla serie delle f_n. Per avere la sommabilità puntuale deve essere sommabile la serie
$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \frac{\sqrt{x}}{(3+nx^2)},$$
che a $x > 0$ fissato ha termine generale dell'ordine di $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$. Ne segue che per potere definire la somma $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (in ogni $x \geq 0$) è necessario e sufficiente che $\alpha + 1 > 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 0}$

- Per la continuità di $S(x)$ nelle $x > 0$ cerchiamo di ottenere la convergenza totale della serie $\sum f_n$.

Dato che si considerano le $x > 0$ è sufficiente la sommabilità di $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$ per $a > 0$ arbitrario. Ma se si fisso un tale a, dal grafico delle f_n si ha:

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a) \quad \text{per } n \text{ grande e quindi}$$

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \simeq \frac{1}{n^{\alpha+1}},$$ da cui la conv. totale segue dall'ipotesi $\alpha > 0$ (che è quella che garantisce l'esistenza di $S(x)$)

Per arrivare alla continuità in $x=0$ servirebbe la convergenza totale in $[0,+\infty[$, cioè la sommabilità di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{n^{\alpha+1/4}}$. Quest'ultima vale se e solo se $\alpha + \frac{1}{4} > 1$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\alpha > \frac{3}{4}}$. Per questi α $S(x)$ è continua anche in $x=0$. Vediamo che per $\alpha \leq \frac{3}{4}$ $S(x)$ non è continua in zero, da cui $\alpha > \frac{3}{4}$ sarà anche necessario.

Consideriamo $\alpha = \frac{3}{4}$ e prendiamo m intero, si ha $(x = 1/\sqrt{m})$

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \sum_{m=1}^{n} f_m\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1/\sqrt[4]{n}}{m^{\frac{3}{4}}\left(3+m/n\right)} \geq$$

$$\frac{1}{4n^{1/4}} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^{3/4}} \simeq \frac{1}{4n^{1/4}} \frac{1}{1-\frac{3}{4}} n^{1-3/4} = 1$$

Quindi $\lim_{n\to\infty} S\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 > 0 = S(0)$ da cui segue che per $\alpha = \frac{3}{4}$ S non è continua in zero. Se $\alpha < \frac{3}{4}$ è facile vedere che le cose vanno anche peggio.

(a.2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+2)(x^2+1)}\,dx = \frac{2\pi i}{2}\Big(\mathrm{Res}(-2) + \mathrm{Res}(i) + \mathrm{Res}(-i) \Big)$

per la nota formula; qui i residui sono riferiti alla funzione

$f(z) = \dfrac{\sqrt{z}}{(z+2)(z^2+1)}$ dove $\sqrt{\rho e^{i\theta}} = \sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2}$ per $0 < \theta < 2\pi$.

· $\mathrm{Res}(f,-2) = \dfrac{\sqrt{-2}}{5} = \dfrac{\sqrt{2}}{5}\, i =$

· $\mathrm{Res}(f,i) = \dfrac{\sqrt{i}}{(i+2)(i+i)} = \dfrac{1+i}{2\sqrt{2}\,(1+2)\,i} = \dfrac{-i\,(2-i)(1+i)}{2\sqrt{2}\;5} =$

$\dfrac{1-3i}{10\sqrt{2}} =$

· $\mathrm{Res}(f,-i) = \dfrac{\sqrt{-i}}{(-i+2)(-i-i)} = \dfrac{-1+i}{-\sqrt{2}\,(2-i)\,2i} = \dfrac{i\,(2+i)(-1+i)}{2\sqrt{2}\;5} =$

$\dfrac{-1-3i}{10\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ INTEGRALE $= \pi i \left(\dfrac{4i}{10\sqrt{2}} + \cancel{\dfrac{1}{10\sqrt{2}}} - \dfrac{3i}{10\sqrt{2}} - \cancel{\dfrac{1}{10\sqrt{2}}} - \dfrac{3i}{10\sqrt{2}} \right) =$

$$\frac{\pi i}{10\sqrt{2}}(-2i) = \boxed{\frac{\pi}{5\sqrt{2}}}$$

(b.1) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{n^\alpha (3+nx^2)}$. (a) Calcoliamo la norma $L^1(0,\infty)$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \frac{\sqrt{x}}{(3+nx^2)}\,dx = \left(x = \frac{y}{\sqrt{n}},\ dx = \frac{dy}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\frac{1}{n^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}\ n^{-1/4}}{(3+y^2)} \frac{dy}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\alpha+\frac{3}{4}}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{(3+y^2)}\,dy = \frac{C}{n^{\alpha+3/4}}$$

Se $\alpha + \frac{3}{4} > 1$, cioè se $\alpha > \frac{1}{4}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1$ è convergente e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in L^1.

Viceversa, se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0,+\infty[)$ deve essere

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_1^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_1^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_1^{\infty} \frac{C}{n^{\alpha+3/4}}$$

(dato che $f_n \geq 0$ $\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} f_n$). Dunque deve essere $\boxed{\alpha > \frac{1}{4}}$

(b) Consideriamo la norma $L^2(0,+\infty)$:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} |f_n(x)|^2 dx = \frac{1}{n^{2\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{x}{(3+nx^2)^2} dx = \left(x = \frac{y}{\sqrt{n}} ,\ dx = \frac{dy}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \frac{1}{n^{2\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{y}{(3+y^2)^2} \frac{dy}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \int_0^{+\infty} \frac{y}{(3+y^2)^2} dy$$

$\Rightarrow \|f_n\|_2 = \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} C_1$. Allora la serie $\sum_1^\infty \|f_n\|_2$ converge per gli $\alpha + \frac{1}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$

Dato che $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ $\sum_1^\infty f_n$ non conv. in $L^2(0,\infty)$ (vedi osservazioni negli ultimi compiti)

(c) Se calcoliamo le norme $L^1([0,1])$:

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 \frac{1}{n^\alpha} \frac{\sqrt{x}}{(3+nx^2)} dx = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \frac{\sqrt{y}}{(3+y^2)} \frac{dy}{\sqrt{n}} \quad \left(x = \frac{y}{\sqrt{n}} \dots \right)$$

$$= \frac{1}{n^{\alpha+3/4}} \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\sqrt{y}}{(3+y^2)} dy \simeq \frac{1}{n^{\alpha+3/4}} \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\sqrt{y}}{3} dy =$$

$$\frac{1}{n^{\alpha+\frac{3}{4}}} \frac{2}{9} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{1/\sqrt{n}} = \frac{2}{9} \frac{1}{n^{\alpha+3/2}}$$

Ne segue la conv. della serie in $L^1([0,1])$ per gli $\alpha + \frac{3}{2} > 1$

$\iff \boxed{\alpha > -\frac{1}{2}}$. Dato che le $f_n \geq 0$ tale cond. è anche necessaria

(6.2) $$y'' - 5y' + 6 = e^{-2|t|}$$

$$y \in L^2(\mathbb{R})$$

Usiamo Fourier: si ha $\mathcal{F}\left(e^{-2|t|}\right)(\omega) = \dfrac{4}{\omega^2+4}$ e allora

$$\left(-\omega^2 - 5\omega i + 6\right)\hat{y}(\omega) = \frac{4}{\omega^2+4} \iff$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{-4}{(\omega+2i)^2(\omega-2i)(\omega+3i)}$$

e allora (posto $f(z) = \dfrac{-4\,e^{izt}}{(z+2i)^2(z-2i)(z+3i)}$)

$$y(t) = \begin{cases} i \operatorname{Res}(f, 2i) & \text{se } t>0 \\ -i\left(\operatorname{Res}(f,-2i) + \operatorname{Res}(f,-3i)\right) \end{cases}$$

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \frac{-4\,e^{-2t}}{(4i)^2\, 5i} = \frac{e^{-2t}}{20\,i}$$

$$\operatorname{Res}(f, -3i) = \frac{-4e^{3t}}{(-i)^2(-5i)} = \frac{-4e^{3t}}{5i}$$

$$\operatorname{Res}(f, -2i) = \frac{d}{dz}\frac{-4e^{izt}}{(z-2i)(z+3i)}\Bigg|_{z=-2i} =$$

$$\frac{-4ite^{-izt}(z-2i)(z+3i) + 4e^{izt}(z+3i+z-2i)}{(z-2i)^2(z+3i)^2}\Bigg|_{z=-2i} =$$

$$\frac{-4ite^{2t}(-4i)(i) + 4e^{2t}(-2i+3i-2i-2i)}{(-4i)^2(i)^2} =$$

$$\frac{-16ite^{2t} - 12ie^{2t}}{16}$$

DUNQUE

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2t}}{20} & \text{se } t>0 \\ \dfrac{4}{5}e^{3t} - te^{2t} - \dfrac{3}{4}e^{2t} & \text{se } t<0 \end{cases}$$

(c.1) $\quad y'' + 5y' + 6y = \delta \qquad$ Usiamo Laplace

$y(t) = 0$ se $t<0$

$$(z^2+5z+6)\check{y}(z) = 1$$

$$\check{y}(z) = \frac{1}{z^2+5z+6} \Longrightarrow \quad \text{posto } g(z) = \frac{e^{zt}}{z^2+5z+6}$$

se $t>0$ $\quad y(t) = \text{Res}(g, -2) + \text{Res}(g, -3) =$

$$= \left.\frac{e^{zt}}{2z+5}\right|_{z=-2} + \left.\frac{e^{zt}}{2z+5}\right|_{z=-3} =$$

$$= e^{-2t} - e^{-3t}$$, mentre $y(t) = 0$ per $t<0$.

DUNQUE

$$y(t) = H(t)\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)$$. Facciamo le derivate

$$y'(t) = \delta\,\underbrace{\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)}_{=0 \text{ se } t=0} + H(t)\left(-2e^{-2t} + 3e^{-3t}\right) =$$

$$= H(t)\left(3e^{-3t} - 2e^{-2t}\right)$$

$$y''(t) = \delta\,\underbrace{\left(3e^{-3t} - 2e^{-2t}\right)}_{=1 \text{ se } t=0} + H(t)\left(-9e^{-3t} + 4e^{-2t}\right) =$$

$$= \delta + H(t)\left(4e^{-2t} - 9e^{-3t}\right)$$

(c.2) (a) $y'' + 4y = \delta$, $y \in \mathcal{S}'$; uso Fourier:

$$(-\omega^2 + 4)\hat{y}(\omega) = 1 \iff$$

$$\hat{y} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\omega+2} - \frac{1}{\omega-2}\right) + c\,\delta_2 + d\,\delta_{-2} \qquad c, d \in \mathbb{C}$$

$$\iff y(t) = -\frac{1}{4}e^{-2it}\frac{1}{2i}\operatorname{sgn}(t) + \frac{1}{4}e^{+2it}\frac{1}{2i}\operatorname{sgn}(t) + c'\sin(2t) + d'\cos(2t)$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(t)}{4}\left(\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}\right) + c'\sin(2t) + d'\cos(2t) =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(t)}{4}\sin(2t) + c'\sin(2t) + d'\cos(2t)$$

(b) prendiamo $v = y'$ dove y' è quella del punto (a).

Allora è chiaro che $v'' + 4v = (y'' + 4y)' = \delta'$.

Dunque le sol. della seconda equazione sono date da

$$v' = \delta\,\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\operatorname{sgn}(t)}{2}\cos(2t) + c''\sin(2t) + d''\cos(2t)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\cos(2t) + c''\sin(2t) + d''\cos(2t)$$