Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 28 giugno 2010

(a.1) Date le funzioni $f_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) := \frac{\sqrt{x}}{n^\alpha(3 + n^2x^2)}$$

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente su $[0, +\infty[$.
2. Si determini se per i valori di α trovati al punto precedente la somma $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ della serie è continua su $]0, +\infty[$.
3. $(*)$ Si dica per quali α (tra quelli trovati al punto 1) la somma $S(x)$ è continua in $x = 0$.
   Per questo è utile ricordare che, se $\beta < 1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ diverge come $n^{1-\beta}$, più precisamente:
   $$\lim_{m\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^\beta}}{n^{1-\beta}} = \frac{1}{1-\beta}$$

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$$

(b.1) Data la successione di funzioni dell'esercizio (a.1)

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0, +\infty[)$.
2. Si dica se per $\alpha = \frac{1}{2}$ la serie converge in $L^2(]0, +\infty[)$.
3. $(*)$ Si dica per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0, 1])$.

(b.2) Si trovi la soluzione del problema differenziale di $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

(c.1) Si trovi la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = \delta \\ y = 0 \text{ su }]-\infty, 0[\end{cases}$$

e trovata la soluzione y si calcolino y' e y''.

(c.2) Utilizzando la trasformata di Fourier si trovino tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} y'' + y = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

e di

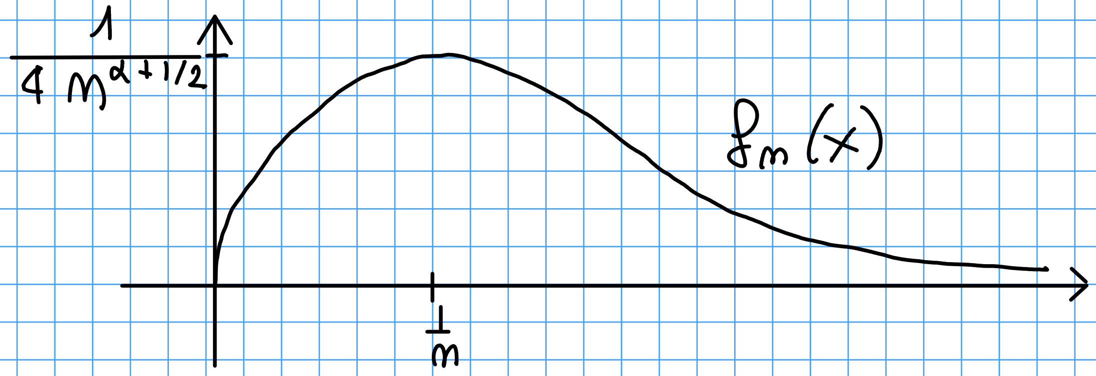
$$\begin{cases} y'' + y = \delta' \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

a.1) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{n^\alpha(3+n^2x^2)}$. Studiamo f_n su $[0,+\infty[$

$f_n(0) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$,

$$f_n'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3+n^2x^2) - \sqrt{x}\cdot 2n^2x^2}{n^\alpha(3+n^2x^2)^2} = \frac{3-3n^2x^2}{2n^\alpha(3+n^2x^2)^2\sqrt{x}}$$

da cui $f_n'(x)=0 \iff x = \frac{1}{n}$ e $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{4n^{\alpha+1/2}}$



Dunque $\|f_n\|_\infty = \|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \dfrac{1}{4n^{\alpha+1/2}}$. In particolare $f_n \to 0$ uniformemente se e solo se $\alpha > -\frac{1}{2}$. Consideriamo la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Per $x>0$ fissato si ha

$$f_n(x) \simeq \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,\frac{1}{n^{2+\alpha}}$$ da cui la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

converge se e solo se $2+\alpha > 1 \iff \alpha > -1$. (a) Dunque la conv. puntuale si ha per $\alpha > -1$.

Se consideriamo la convergenza totale della serie ci troviamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1/2}}$ che converge se e solo se $\alpha+\frac{1}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$. Per tali valori di α la serie converge totalmente su $[0,+\infty[$ e quindi conv. unif. su $[0,+\infty[$.

In particolare se $\alpha > \frac{1}{2}$ $S(x)$ è continua su tutto $[0,+\infty[$.

Però, se vogliamo solo la continuità sulle $x>0$, possiamo fissare $\varepsilon > 0$ e notare che, se $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

$$\|f_n\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} = \max_{x\geq\varepsilon} |f_n(x)| = f_n(\varepsilon),$$

e allora

$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} < +\infty$ per ogni $\alpha > -1$ (per quanto visto nella discussione del punto (a)). (b) In questo modo si prova che per ogni $\alpha>-1$ la somma $S(x)$ è continua su $[\varepsilon,+\infty[$. Essendo $\varepsilon>0$ arbitrario, si deduce che $S(x)$ continua su $]0,+\infty[$, per tutti gli $\alpha > -1$, cioè per tutti gli α trovati al punto (a).

Per trattare la domanda c) notiamo che si è già visto (usando la convergenza totale) che $S(x)$ è continua su $[0,+\infty[$ quando $\alpha > \frac{1}{2}$. Se mostriamo che non è continua per gli $\alpha \le \frac{1}{2}$ abbiamo risolto la questione. Notiamo intanto che $S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0$. Sia m un intero:

$$S\left(\frac{1}{m}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{1}{m}\right) \ge \sum_{n=1}^{m} f_n\left(\frac{1}{m}\right) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\sqrt{1/m}}{n^{\alpha}\left(3+\left(\frac{n}{m}\right)^2\right)} \ge$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{\alpha}\cdot 4}.$$ Dato che (vedi il suggerimento con $\beta = \frac{1}{2}$)

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{\alpha}}}{\sqrt{m}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = 1 \\ 2 & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$ per $\alpha \le \frac{1}{2}$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} S(x) > 0 = S(0)$$

e quindi (c) $S(x)$ è continua in zero se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$

a.2) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \pi i\left(\mathrm{Res}(f,-1) + \mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)\right)$$

— dove $f(z) = \dfrac{\sqrt{z}}{(z+1)(z^2+1)}$ e $\sqrt{\rho e^{i\theta}} = \sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2}$ se $0<\theta<2\pi$

$$= \pi i \left(\frac{\sqrt{z}}{z^2+1} \Big|_{z=-1} + \frac{\sqrt{z}}{(z+1)(z+i)} \Big|_{z=i} + \frac{\sqrt{z}}{(z+1)(z-i)} \Big|_{z=-i} \right) =$$

$$\pi i \left(\frac{i}{2} + \frac{e^{\frac{\pi}{4} i}}{(1+i)\,2i} + \frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{(1-i)(-2i)} \right) = \frac{\pi}{2} \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(1+i)}{(1+1)} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1+i)}{(1+i)(-1)} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{2} - 1 \right)$$

(b.1) Se f_n sono quelle di (a.1) si ha (su $[0, +\infty[$)

(a) $\displaystyle \| f_n \|_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{n^\alpha (3+(nx)^2)} \, dx = \left(nx = y \,,\; x = \frac{y}{n} \,,\; dx = \frac{dy}{n} \right)$

$\displaystyle \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y/n}}{3+y^2} \frac{dy}{n} = \frac{1}{n^{\alpha+3/2}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{3+y^2} \, dy$. Allora

$\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{3+y^2} \, dy \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+3/2}}$ che è conv $\Leftrightarrow \alpha + 3/2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}$

D'altra parte se $\alpha \le -\frac{1}{2}$ la serie non può convergere in L^1 perché se convergesse allora $\displaystyle \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx = +\infty$

(dato che $\displaystyle \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \| f_n \|_1$ essendo $f_n \geq 0$). ASSURDO

(b) Vediamo la convergenza L^2:

$$\|f_n\|_2^2 = \frac{1}{n^{2\alpha}}\int_0^{+\infty} \frac{x}{(3+n^2x^2)^2}\,dx = \frac{1}{n^{2\alpha}}\int_0^{+\infty}\frac{y/n}{(3+y^2)^2}\frac{dy}{n} = \frac{1}{n^{2\alpha+2}}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{y}{(3+y^2)^2}\,dy}_{= c^2}$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_2 = \frac{c}{n^{\alpha+1}} \quad \text{per cui}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_2 \ \text{conv.} \iff \alpha+1>1 \iff \alpha>0.$$

Dato che $\frac{1}{2}>0$ allora per $\alpha=\frac{1}{2}$ la serie conv. unif $(L^2) \Rightarrow$ converge.

(c) Consideriamo le norme $L^1([0,1])$. Si ha $(y = nx \cdots)$

$$\frac{1}{n^\alpha}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(3+n^2x^2)}\,dx = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{y/n}}{(3+y^2)}\frac{dy}{n} = \frac{1}{n^{\alpha+3/2}}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{y}}{3+y^2}\,dy \simeq$$

$$\frac{1}{n^{\alpha+3/2}}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{y}}{3}\,dy = \frac{1}{n^{\alpha+3/2}}\,\frac{2}{9}\sqrt{\frac{1}{n^3}} = \frac{2}{9}\,\frac{1}{n^{\alpha+3}}.$$ Dunque

$\sum \|f_n\|_1 < +\infty$ se e solo se $\alpha+3>1 \iff \underline{\underline{\alpha>-2}}$

Dato che $f_n \geq 0$, ragionando come nel caso (a), si vede che la serie converge in $L^1([0,1])$ se e solo se $\alpha>-2$

(b.2)
$$\begin{cases} y''-5y'+6y = e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Usiamo la trasformata di Fourier:

$\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right) = \frac{2}{\omega^2+1}$ e trasformando l'equazione

$$\left(-\omega^2 - 5i\omega + 6\right)\hat{y}(\omega) = \frac{2}{\omega^2+1} \iff$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{-2}{(\omega^2+1)(\omega^2+5i\omega-6)}$$

e $\omega^2+5i\omega-6=0$ se $\omega=-2i$ o $\omega=-3i$ (radici semplici)

Si ha: (posto $f(z) = \frac{-2e^{izt}}{(z^2+1)(z^2+5iz-6)} = \frac{-2e^{izt}}{(z+i)(z-i)(z+3i)(z+2i)}$)

$$\text{Res}(f, i) = \frac{-2e^{-t}}{2i\cdot 4i\cdot 3i} = \frac{-e^{-t}i}{12}$$

$$\text{Res}(f,-i) = \frac{-2e^{t}}{(-2i)(2i)(i)} = \frac{e^{t}i}{2}$$

$$\text{Res}(f,-2i) = \frac{-2e^{2t}}{(-i)(-3i)\,i} = \frac{-2e^{2t}i}{3}$$

$$\operatorname{Res}(f,-3i) = \frac{-2e^{3t}}{(-2i)(-4i)-i} = \frac{e^{3t}i}{4}$$

e quindi

$$y(t) = \begin{cases} i\operatorname{Res}(i) = \dfrac{e^{-t}}{12} & \text{se } t>0 \\ -i\left(\operatorname{Res}(-i)+\operatorname{Res}(-2i)+\operatorname{Res}(-3i)\right) = \\ \dfrac{e^{t}}{2} - \dfrac{2e^{2t}}{3} + \dfrac{e^{3t}}{4} = \dfrac{6e^{t}-8e^{2t}+3e^{3t}}{12} & \text{se } t<0 \end{cases}$$

(c.1)

$$y'' - 5y' + 6y = \delta \qquad y(t)=0 \quad \text{se } t<0$$

Usiamo Laplace:

$$(z^2-5z+6)\check{y}(z) = 1 \iff \check{y}(z) = \frac{1}{z^2-5z+6} = \frac{1}{(z-3)(z-2)}$$

Allora, se $f(z) = \dfrac{e^{zt}}{(z-3)(z-2)}$

$$y(t) = \operatorname{Res}(f,3) + \operatorname{Res}(f,2) = \frac{e^{2t}}{2-3} + \frac{e^{3t}}{3-2} =$$

$$e^{3t} - e^{2t} \qquad \text{PER } t>0$$

$$y(t) = 0 \quad \text{per } t<0$$

cioè $\quad y(t) = H(t)\left(e^{3t} - e^{2t}\right).$

Calcoliamo le derivate

$$y'(t) = \delta\,(\underbrace{e^{3t} - e^{2t}}_{=0 \text{ in } t=0}) + H(t)\left(3e^{3t} - 2e^{2t}\right) = H(t)\left(3e^{3t} - 2e^{2t}\right)$$

$$y''(t) = \delta\,(\underbrace{3e^{3t} - 2e^{2t}}_{=1 \text{ in } t=0}) + H(t)\left(9e^{3t} - 4e^{2t}\right) = \delta + H(t)\left(9e^{3t} - 4e^{2t}\right)$$

(c.2)