Test di Analisi 2 del 13/01/21 (primo appello invernale 20-21)

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

*Campo obbligatorio

1. Email *

____

Istruzioni di compilazione: Si usi:

· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;

· il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;

· le combinazioni `>=` per il maggiore o eguale $\geq$ e `<=` per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;

· il carattere `_` per indicare l'indice: `a_n` per a_n;

· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;

· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;

· `Pi` per π;

· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;

· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;

· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e mezza)

2. Cognome *

____

3. Nome *

____

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Esercizio Uno

Si consideri il dominio chiuso

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$$

Si considerino inoltre la superficie:

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f} := xyz(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}})$$

6. 1 punto

D è
(a) un dominio regolare;
(b) un dominio regolare a tratti (ma non regolare);
(c) un aperto limitato;
(d) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)

7. 1 punto

La frontiera ∂D di D è vuota.
Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

8. 1 punto

Il bordo $\Sigma(\partial D)$ di ∂D è vuoto.
Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

9. 1 punto

La parte singolare $\Sigma^*(\partial D)$ di ∂D è vuota.
Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

10. 1 punto

Il vettore $\vec{\nu}$ di coordinate $(1,1,1)$ è normale a ∂D nel punto P avente le (stesse) coordinate $(1,1,1)$.
Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

11.

5 punti

Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S.

Esercizio Due

Si considerino $V \subset \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiti da:

$$V := \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 6x + 2y + 3z = 6\}, \qquad f(x, y) := xyz.$$

Consideriamo inoltre i seguenti sottoinsiemi di V:

$$W := \{(x, y, z) \in V \ : \ x = 0\} \cup \{(x, y, z) \in V \ : \ y = 0\} \cup \{(x, y, z) \in V \ : \ z = 0\},$$
$$Z := \{(-1, 0, 0)\} \cup \{(0, 3, 0)\} \cup \{(0, 0, 2)\}.$$

12.

1 punto

W è la frontiera di V: $\partial V = W$.

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

13.

1 punto

Z è la parte singolare di V: $\Sigma^*(V) = Z$.

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

14. 1 punto

I punti di W sono stazionari vincolati per f su V.
Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

15. 1 punto

Il punto $(0, 3, 0)$ è stazionario vincolato per f su V.
Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

16. 1 punto

Se $(x, y, z) \in W$, allora $f(x, y, z) = 0$.
Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

17. 2 punti

Si trovi

$$\min_{(x,y,z)\in V} f(x, y, z)$$

___

18. 4 punti

Si trovi

$$\max_{(x,y,z)\in V} f(x, y, z)$$

___

Esercizio Tre

Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n4^n} x^{2n}$. Indichiamo con R il raggio di convergenza della serie ($R \in [0, +\infty]$) e con I l'intervallo delle x per cui la serie converge (potrebbe essere $I = \emptyset$).

Se $x \in I$ chiamo $f(x)$ la somma della serie (cioè $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n4^n} x^{2n}$ per le x in cui la definizione ha senso).

19. 1 punto

Si trovi R.

20. 1 punto

Si dica quale delle seguenti eguaglianze è corretta.

(a) $I =]-R, R[$;
(b) $I =]-R, R]$;
(c) $I = [-R, R[$;
(d) $I = [-R, R]$.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)

21. 1 punto

Si calcoli $f''(0)$.

22. 4 punti

Si indichi quale delle seguenti formule è corretta. Si può dare per buono che **una e una sola** è corretta. Si consiglia di usare le proprietà di derivazione per serie per le serie di potenze (cercando di ricondursi alla serie geometrica oppure ragionando per esclusione e individuando quali formule sono certamente sbagliate) .

$$(1) \quad f'(x) = \frac{1}{4+x^2} \qquad (2) \quad f'(x) = \frac{2x}{4+x^2} \qquad (3) \quad f'(x) = \frac{x^2}{4+x^2}$$
$$(4) \quad f'(x) = \frac{1}{4-x^2} \qquad (5) \quad f'(x) = \frac{2x}{4-x^2} \qquad (6) \quad f'(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$$

Contrassegna solo un ovale.

- (1)
- (2)
- (3)
- (4)
- (5)
- (6)
- Altro: ____________________

Esercizio Quattro

Consideriamo la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Sia inoltre: $B(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$. Indicando $Y(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$Y'(t) = A\,Y(t) + B(t)$$

che corrisponde a:

$$\begin{cases} x' &= 4x - y - z \\ y' &= -2x + 2y + z \\ z' &= 4x - 2y + e^t \end{cases} \qquad \text{(Sys)}$$

Diamo per buoni i fatti seguenti:

- A ha un solo autovalore $\hat{\lambda}$;
- posto $B := A - \hat{\lambda} I$ risulta: $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ e $B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

23. 1 punto

Si trovi $\hat{\lambda}$.

24. 1 punto

Si trovi la molteplicità geometrica $m_G(\hat{\lambda})$ di $\hat{\lambda}$.

Contrassegna solo un ovale.

- 1
- 2
- 3

25. 1 punto

Si dica quale affermazione tra le seguenti è corretta:
(a) $m_G(\hat{\lambda})$ è eguale alla dimensione del nucleo di B;
(b) $m_G(\hat{\lambda})$ è eguale alla dimensione del nucleo di B^2;
(c) $m_G(\hat{\lambda})$ è eguale al minimo k per cui $B^k \neq 0$ e $B^{k+1} = 0$;
(d) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)

26. 4 punti

Si trovi **una soluzione particolare** $\bar{Y}(t)$ di (Sys).

Suggerimento: si cerchi $\bar{Y}(t)$ della forma $\bar{Y}(t) = e^t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ da determinare.

27. 5 punti

Si trovi **la** soluzione $Y(t)$ di (Sys) **tale che** $Y(0) = 0$.
Suggerimento: si cerchi $Y(t)$ come somma $Y(t) = \bar{Y}(t) + Y_0(t)$; in questo modo Y_0 è soluzione del sistema omogeneo $Y' = AY$: si può usare allora la forma di Jordan $A = MJM^{-1}$ e applicare la formula risolutiva per il problema omogeneo (in particolare c'è da trovare M e capire chi è il dato iniziale $Y_0(0)$).