Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 19 aprile 2024

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è due ore.

Esercizio 1 Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{|x|^3+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Dato un vettore $\vec{v} = v_1\vec{\mathbf{i}} + v_2\vec{\mathbf{j}}$, con $v_2 \neq 0$, si calcoli la derivata direzionale di f in $(0,0)$ lungo $\vec{v}$. (2 pt.)

$f'(0,0)(\vec{v}) =$ $\boxed{\dfrac{v_1^2}{v_2}}$ / non esiste per tutti i $\vec{v}$

(b) Si dica se f è continua in $(0,0)$: ~~SI~~ NO (1 pt.)

(c) Si dica, motivando brevemente la risposta, se f è differenziabile in $(0,0)$: SI ~~NO~~ perché: (3 pt.)

Non può essere differenziabile perché le derivate direzionali $f'(0)(\vec{v}) = \dfrac{v_1^2}{v_2}$ NON SONO LINEARI IN $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$

ES. 1 $\quad f = \dfrac{x^2 y}{|x|^3 + y^2}$ $\quad (f(0)=0)$. Allora

(a) $f'(0)(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(0+t\vec{v}) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t} \dfrac{t^2 v_1^2\, t v_2}{|t|^3|v_1|^3 + t^2 v_2^2} =$

$\lim_{t\to 0} \dfrac{v_1^2 v_2}{|t||v_1|^3 + v_2^2} \underset{(\text{se } v_2 \neq 0)}{=} \dfrac{v_1^2 v_2}{v_2^2} = \dfrac{v_1^2}{v_2}$

(b) $0 \leq |f| = \dfrac{|x|^{1/2}\, |x|^{3/2}\, |y|}{|x|^3 + y^2} \leq |x|^{1/2} \dfrac{\frac{(|x|^{3/2})^2 + |y|^2}{2}}{|x|^3 + y^2} = \dfrac{|x|^{1/2}}{2}$

Dato che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^{1/2} = 0$ si ha che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

ES. 2 $\quad$ Se $y = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1} = \sum_0^\infty (n+1) a_{n+1} x^n$

e $\quad y'' = \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_0^\infty (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} \left(= \sum_0^\infty (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n\right)$

DUNQUE

$x(x+1) y'' - (4x+1) y' - 6y = x^2 y'' + x y'' - 4x y' - y' - 6y =$

$\sum_{n=0}^\infty \left(n(n-1) a_n + (n+1) n a_{n+1} - 4 n a_n - (n+1) a_{n+1} - 6 a_n \right) x^n =$

$\sum_{n=0}^\infty \left[a_{n+1} (n+1)(n-1) + a_n (n^2 - n - 4n - 6) \right] x^n =$

$n^2 - 5n - 6 = 0 \iff n = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \dfrac{5\pm 7}{2} = \begin{cases} 6 \\ -1 \end{cases}$

$\sum_{n=0}^\infty \left[a_{n+1} (n+1)(n-1) + a_n (n-6)(n+1) \right] x^n$

Se imponiamo che valga l'equazione otteniamo:

$(R) \quad (n+1)\left[a_{n+1}(n-1) + a_n (n-6) \right] = b_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 10 & \text{se } n = 1 \\ 12 & \text{se } n = 2 \\ 0 & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$

- Se mettiamo $n = 1 \Rightarrow 2 a_1 (-5) = b_1 = 10$

  dunque $\boxed{a_1 = -1}$.

- Se mettiamo $n = 0 \Rightarrow \underbrace{a_1 (-1)}_{1} + a_0 (-6) = b_0 = 1 \iff \boxed{a_0 = 0}$

- Se mettiamo $n = 2 \Rightarrow 3\left[a_3 - 4 a_2 \right] = b_2 = 12 \iff \boxed{a_3 = 4a_2 + 4}$

  e su a_2 NON HO NESSUNA CONDIZIONE

- Se $n \geq 3$ $\quad b_n = 0$ dunque posso riscrivere R come

$(R^*) \quad a_0 = 0, a_1 = -1, a_2$ arbitrario, $a_3 = 4a_2 + 4$, $a_{n+1} = -\dfrac{n-6}{n-1} a_n$

(b) Dato che ogni sol. ha $y'(0) = a_1 = -1$ e che posso fissare a_2 ad arbitrio $\Rightarrow$ $\exists\, \infty$ sol. con $y'(0) = -1$

Esercizio 2 Si consideri la seguente equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$x(x+1)y'' - (4x+1)y' - 6y = 1 + 10x + 12x^2.$$

Diamo per buono che le soluzioni definite vicino a zero si possono esprimere come una serie di potenze:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

(a) Si scriva una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n (2 pt.)

($\mathcal{R}$)

$$(n+1)\left[a_{n+1}(n-1) + a_n(n-6)\right] = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 10 & \text{se } n=1 \\ 12 & \text{se } n=2 \\ 0 & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

OPPURE

$a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 \in \mathbb{R}$, $a_3 = 4a_2 + 4$

$$a_{n+1} = -\frac{n-6}{n-1} a_n \quad \forall n \geq 3$$

(b) Si indichi quale delle seguenti affermazioni è corretta: (1 pt.)

(b.1) Non esiste nessuna soluzione y con $y'(0) = -1$ VERO FALSO;

(b.2) esiste un'unica soluzione y con $y'(0) = -1$ VERO FALSO;

(b.3) esistono infinite soluzioni y con $y'(0) = -1$ VERO FALSO;

(b.4) nessuna delle precedenti.

(c) Si dica se esiste una soluzione y con y polinomio di secondo grado e in caso affermativo si trovi y: (3 pt.)

$y(x) =$ $-x - x^2$ / non esiste

(d) Si dica se esiste una soluzione y tale che $y''(0) = 8$ in caso affermativo si trovi una tale y: (3 pt.)

$y(x) =$ $-x + 4x^2 + 20x^3 + 30x^4 + 20x^5 + 5x^6$ / non esiste.

. Se scelgo $a_2 = -1$ trovo $a_3 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 3$

NOTIAMO CHE per $n=6$ si ha $a_7=0 \Rightarrow a_n=0 \ \forall n \geq 7$.

- Se vogliamo che $y''(0)=8$ dobbiamo prendere $\boxed{a_2=4}$ $\left(a_2 = \frac{y''(0)}{2}\right)$ da cui, usando (R^*) $a_3 = 4a_2+4 = 16+4=20$

$\boxed{a_3 = 20}$, $a_4 = -\frac{(3-6)}{3-1} a_3 = \frac{3}{2} 20 = 30$ $\boxed{a_4=30}$

$a_5 = -\frac{(4-6)}{4-1} a_4 = \frac{2}{3} 30 = 20$ $\boxed{a_5=20}$

$a_6 = -\frac{(5-6)}{5-1} a_5 = \frac{1}{4} 20 = \frac{5}{4}$ $\boxed{a_6=5}$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -x+4x^2+20x^3+30x^4+20x^5+5x^6$$

$y'(x) \quad -1+8x+60x^2+120x^3+100x^4+30x^5$

$y''(x) = 8+120x+360x^2+400x^4+150x^4$

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
$xy'' \rightarrow$		$\cancel{8}$	120	$\cancel{360}$	400	$\cancel{150}$	
x^2y''			8	$\cancel{120}$	360	$\cancel{400}$	150
$-y'$	1	$-\cancel{8}$	-60	$-\cancel{120}$	-100	$-\cancel{30}$	
$-4xy'$		4	-32	$-\cancel{240}$	-480	$-\cancel{400}$	-120
$-6y$		6	-24	$-\cancel{120}$	-180	$-\cancel{120}$	-30
	1	10	12	0	0	0	0

$1+10x+12x$ TORNA

Esercizio 3 Si considerino il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$D := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, (z-3)^2 \leq 4(x^2 + y^2)\right\}.$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) := \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}).$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti. Indichiamo con $\hat{\nu}$ la normale unitaria uscente da D. Dati due numeri $a \leq b$ si considerino gli insiemi:

$$S := \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 5, a \leq z \leq b\right\},$$
$$L := \left\{(z-3)^2 = 4(x^2 + y^2), a \leq z \leq b\right\}.$$

(a) Si trovino a e b per cui $\partial D = S \cup L$ (si può prendere per buono che a e b esistono):

$a = \boxed{-1}$, $b = \boxed{\frac{11}{5}}$. (2 pt.)

NEL RESTO DELL'ESERCIZIO S e L saranno considerati con a e b trovati sopra.

(b) Se $P = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1\right)$ si calcoli $\hat{\nu}(P)$: (1 pt.)

$\hat{\nu}(P) = \boxed{}\ \vec{\mathbf{i}} + \boxed{}\ \vec{\mathbf{j}} + \boxed{}\ \vec{\mathbf{k}}$ / ~~non esiste~~

(c) Se $P = (0, 3/2, 0)$ si calcoli $\hat{\nu}(P)$: (1 pt.)

$\hat{\nu}(P) = \boxed{0}\ \vec{\mathbf{i}} + \boxed{-\frac{2}{\sqrt{5}}}\ \vec{\mathbf{j}} + \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}\ \vec{\mathbf{k}}$ / non esiste

(d) Si calcoli l'area della superficie S

$A(S) = \boxed{\frac{32\pi}{\sqrt{5}}}$. (3 pt.)

(e) Si calcolino i flussi di $\vec{f}$ attraverso le superfici orientate $(S, \hat{\nu})$ e $(L, \hat{\nu})$: (3 pt.)

$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{32}{5}\frac{\pi}{\sqrt{5}}}$ $\iint_L \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{-\frac{32}{5}\frac{\pi}{\sqrt{5}}}$.

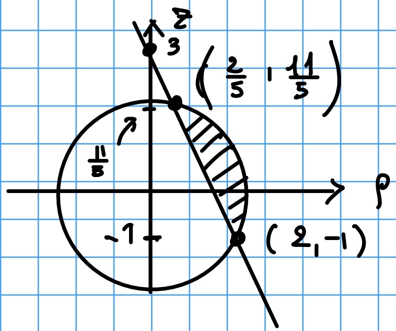
$D=\{x^2+y^2+z^2\le 5,\ (z-3)^2\le 4(x^2+y^2)\}$. Allora se indichiamo $\rho^2=x^2+y^2$

$$\partial D=\underbrace{\{\rho^2+z^2=5,\ (z-3)^2\le 4\rho^2\}}_{S}\cup\underbrace{\{\rho^2+z^2\le 5,\ (z-3)^2=4\rho^2\}}_{L}$$

Vediamo dove si intersecano S e L:

$$\begin{cases}\rho^2+z^2=5\\(z-3)^2=4\rho^2\end{cases}\iff\begin{cases}\rho^2=5-z^2\\ z^2-6z+9=4\rho^2=20-4z^2\end{cases}\Rightarrow 5z^2-6z-11=0$$

ne segue $z=\dfrac{3\pm\sqrt{9+55}}{5}=\dfrac{3\pm 8}{5}=\begin{cases}-1 & \to \rho\left(=\frac{1}{2}|z-3|\right)=2\\[4pt] \frac{11}{5} & \to \rho=\frac{1}{2}\left|\frac{11}{5}-3\right|=\left|\frac{11-15}{2\cdot 5}\right|=\frac{2}{5}\end{cases}$



(a) DUNQUE

$S=\{x^2+y^2+z^2=5:-1\le z\le 11/5\}$

$L=\{(z-3)^2=4(x^2+y^2):-1\le z\le 11/5\}$

cioè $\boxed{a=-1,\ b=\frac{11}{5}}$

(b) Se $P=(\sqrt{2},\sqrt{2},-1)$ allora si vede che $P\in S\cap L$ (NOTA CHE $\rho=\sqrt{2+2}=2$) $\Rightarrow\ \nexists\ \hat{\nu}(P)$

(c) se $P=(0,3/2,0)$, cioè $x=0$, $y=3/2$, $z=0$

si vede che $(z-3)^2-4(x^2+y^2)=9-4\frac{9}{4}=0$

dunque $P\in L$ e $P\notin L$ (perché in $L\cap S$ $z=\begin{cases}-1\\11/5\end{cases}$).

Nota che in L si annulla $G(x,y,z)=(z-3)^2-4x^2-4y^2$ (e $G\le$ in D.)

e che $\nabla G(x,y,z)=-8x\vec{\imath}-8y\vec{\jmath}-2(z-3)\vec{k}$.

Dunque $\hat{\nu}(P)=\dfrac{\nabla G(P)}{\|\nabla G(P)\|}=\dfrac{0\vec{\imath}-12\vec{\jmath}+6\vec{k}}{\sqrt{0+144+36}}=$

$$\frac{-12\vec{\jmath}+6\vec{k}}{\sqrt{180}}=\frac{-12\vec{\jmath}+6\vec{k}}{6\sqrt{5}}=\frac{-2\vec{\jmath}+\vec{k}}{\sqrt{5}}$$

(d) Per calcolare l'area di S parametrizziamo S con coordinate sferiche

$$\vec{\Gamma}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{5}\,\hat{\Gamma}(\vartheta,\varphi) \quad \text{dove}$$

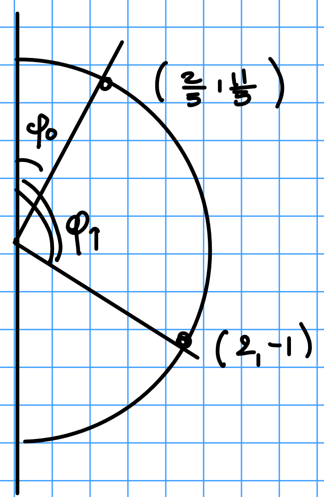
$$\hat{\Gamma}(\vartheta,\varphi) = \cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k}$$

($\hat{\Gamma}$ parametrizza la sfera unitaria). È ben noto che

$$\left\| \frac{\partial\hat{\Gamma}}{\partial\vartheta} \otimes \frac{\partial\hat{\Gamma}}{\partial\varphi} \right\| = \sin\varphi \Rightarrow \left\| \vec{N}_{\Gamma}(\vartheta,\varphi) \right\| = \left\| \sqrt{5}\frac{\partial\hat{\Gamma}}{\partial\vartheta} \otimes \sqrt{5}\frac{\partial\hat{\Gamma}}{\partial\varphi} \right\|$$

$$= 5\sin\vartheta.$$

Se voglio descrivere S ϑ varia tra 0 e 2π mentre φ varia tra φ_0 e φ_1 dove $\sqrt{5}\cos(\varphi_0) = \frac{11}{5}$; $\sqrt{5}\cos(\varphi_1) = -1$



Dunque

$$A(S) = \iint_S 1\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} 5\sin\vartheta\,d\vartheta =$$

$$2\pi\left[-5\cos\vartheta\right]_{\varphi_0}^{\varphi_1} = 10\pi\left(\cos(\varphi_0) - \cos(\varphi_1)\right) =$$

$$\frac{10\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{11}{5} + 1\right) = \frac{10\pi}{\sqrt{5}}\,\frac{16}{5} = \boxed{\frac{32\pi}{\sqrt{5}}}$$

(e) Notiamo che su S $\vec{f}(P)\cdot\hat{\nu}(P) = \|f(P)\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}^3} = \frac{1}{5}$

(perché $\vec{f}(P)$ e $\hat{\nu}(P)$ sono dei multipli di P e $\|P\| = \sqrt{5}$)

$$\Rightarrow \iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \frac{1}{5}\text{Area}(S) = \boxed{\frac{32\pi}{5}}$$

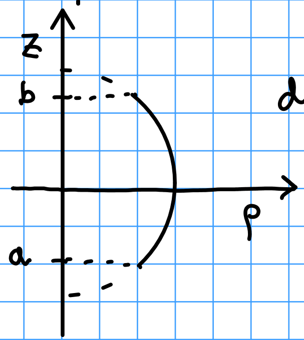
(f) Notiamo che $\text{div}\,\vec{f} = 0$ (fatto a lezione - si verifica facilmente). DUNQUE

$$\iint_L \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = -\iint_S \vec{f}\,\hat{\nu}\,d\sigma = \boxed{-\frac{32}{5}\pi}$$

② UN ALTRO MODO PER TROVARE $A(S)$ vedendolo come insieme di rotazione di un arco di circonferenza.

Posso usare la seguente parametrizzazione per S:

$$\Gamma(\theta, z) = \left(g(z)\cos(\theta),\ g(z)\sin\theta,\ z \right)$$



dove $g(z) = \sqrt{5-z^2}$. Se $z \in [a,b]$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ si vede che $\Gamma(\theta, z)$ è una parametrizzazione per S. In particolare

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = -g(z)\sin(\theta)\,\vec{i} + g(z)\cos\theta\,\vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial z} = g'(z)\cos(\theta)\,\vec{i} + g'(z)\cos\theta\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{N}_\Gamma(\theta, z) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & -g(z)\sin(\theta) & g'(z)\cos(\theta) \\ \vec{j} & g(z)\cos(\theta) & g'(z)\sin(\theta) \\ \vec{k} & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$g(z)\left(\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta - \vec{k}\,g'(z) \right) \Rightarrow$$

$$\|\vec{N}_\Gamma(\theta, z)\| = |g(z)|\sqrt{1 + g'(z)^2} = g(z)\sqrt{1+g'(z)^2} \qquad (g \geq 0)$$

$$= \sqrt{5-z^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-z}{\sqrt{5-z^2}} \right)^2} = \sqrt{5-z^2}\sqrt{\frac{5-z^2+z^2}{5-z^2}} = \sqrt{5}$$

Ne segue che $A(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \sqrt{5}\, dz = (b-a)\sqrt{5} \cdot 2\pi$

$$= \left(\frac{11}{5} + 1 \right)\sqrt{5}\, 2\pi = \frac{16}{5}\sqrt{5}\, 2\pi = 32\frac{\sqrt{5}}{5}\pi = \frac{32}{\sqrt{5}}\pi$$

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x,y) = 2xy - 8x + 5y$ e sia

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \, : \, x^2 - 4 \le y \le 4 - x^2\right\}.$$

(a) Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per f su D (possono essere meno di otto): (6 pt.)

$(x,y) =$	$(1,-3)$	$(x,y) =$	
$(x,y) =$	$(0,4)$	$(x,y) =$	$\left(-\frac{5}{3}, \frac{11}{9}\right)$
$(x,y) =$	$(-2,0)$	$(x,y) =$	$(2,0)$
$(x,y) =$		$(x,y) =$	

(b) Si calcoli il minimo di f su D (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = \boxed{-29}.$$

(c) Si trovi un punto di massimo (assoluto) per f su D (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$(x_{max}, y_{max}) = \boxed{(0,4)}.$$

$D = \{ G_1 \le 0,\ G_2 \le 0 \}$ $\qquad f = 2xy - 8x + 5y$

dove $G_1(x,y) = x^2 - 4 - y$ e $G_2(x,y) = y + x^2 - 4$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2y - 8 \\ 2x + 5 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

(A) PUNTI CRITICI LIBERI $\quad \nabla f = 0 \iff x = -\frac{5}{2}\ \ y = 4$

TROVO IL PUNTO $\left(-\frac{5}{2}, 4\right)$ MA IN D DEVE ESSERE $-2 \le x \le 2$ per cui $\left(-\frac{5}{2}, 4\right) \notin D$

(B) PTI CRITICI DOVE $G_1 = 0$ $\quad G_2 < 0$

$$\begin{cases} 2y - 8 = 2\lambda x \\ 2x + 5 = -\lambda \\ y = x^2 - 4 \quad \underbrace{-2 < x < 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & 2(x^2-4) - 8 = -2x(2x+5) \iff \\ & 2x^2 - 8 - 8 = -4x^2 - 10x \iff \\ & 6x^2 + 10x - 16 = 0 \iff \\ & x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 16 \cdot 6}}{6} = \frac{-5 \pm 11}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{17}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

SI VEDE CHE CORRISPONDE A $G_2 < 0$

se $x = 1$ trovo $y = -3$ se $x = -\frac{17}{6}$ il punto non sta in D perché $-\frac{17}{6} < -2$.

HO TROVATO $\boxed{(1, -3)}$

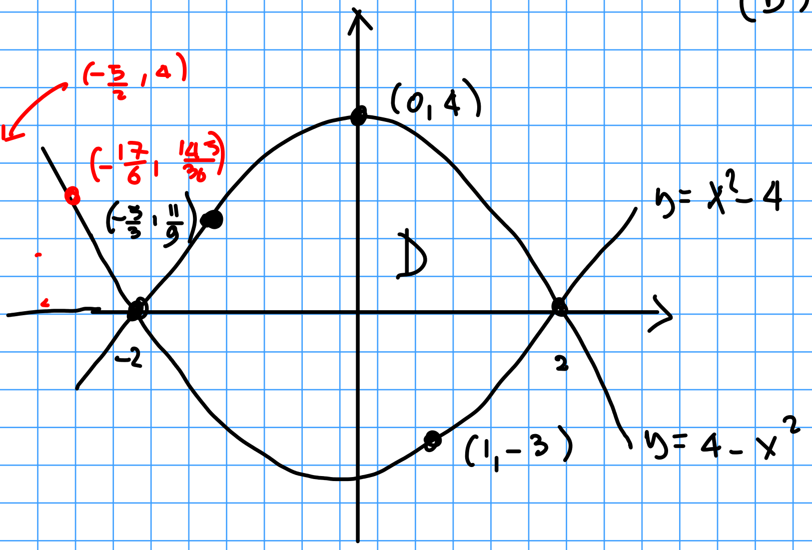
(C) PTI CRITICI CON $G_2 = 0$ $G_1 < 0$

$$\begin{cases} 2y - 8 = 2\lambda x \\ 2x + 5 = \lambda \\ y = 4 - x^2,\ 2 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & 2(4 - x^2) - 8 = 2x(2x+5) \iff \\ & 8 - 2x^2 - 8 = 4x^2 + 10x \iff \\ & 6x^2 + 10x = 0 \iff \\ & x = 0,\ x = -5/3 \end{aligned}$$

Se $x = 0$ trovo $y = 4$ $\quad$ se $x = -\frac{5}{3}$ trovo $y = 4 - \frac{25}{9} =$

$\frac{36 - 25}{9} = \frac{11}{9}$ (Entrambe hanno $-2 < x < 2$)

Dunque ho altri due punti. $\boxed{(0, 4)}$ e $\boxed{(-5/3, 11/9)}$



(D) i punti in cui $G_1 = G_2 = 0$ che sono automaticamente critici

$\boxed{(-2,0)}$ $\boxed{(2,0)}$

CALCOLO f su tutti questi punti

$f(-2,0) = 8 \qquad f(2,0) = -8$

$f(1,-3) = -6 - 8 - 15 = -29$

$f(0,4) = 20$

$f\left(-\frac{5}{3}, \frac{11}{9}\right) = -\frac{110}{27} - \frac{40}{3} + \frac{55}{9} = \frac{-110 - 360 + 165}{27}$

$= \frac{-305}{27} \simeq -11{,}3$

SI VEDE CHE IL MIN è -29 (nel pto $(1,-3)$)

e IL MAX è 20 (nel pto $(0,4)$)

Esercizio 5 Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y - 3z - 1 \\ y' = 2x - y - 2z - 1 \\ z' = 3x - 2y - 2z \end{cases} . \qquad \text{(Sys)}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(a) Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (1 pt.)

$\lambda_1 =$ 1 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 2 $\quad m_G(\lambda_1) =$ 1 ;

$\lambda_2 =$ -1 $\quad m_A(\lambda_2) =$ 1 $\quad m_G(\lambda_2) =$ 1 ;

$\lambda_3 =$ $\quad m_A(\lambda_3) =$ $\quad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

(b) Si trovi una soluzione $\bar{Y}$ di (Sys) del tipo $\bar{x}(t) = a$, $\bar{y}(t) = b$, $\bar{z}(t) = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, oppure si scriva "non esiste": (2 pt.)

$\bar{x}(t) =$ 0

$\bar{y}(t) =$ 1

$\bar{z}(t) =$ -1

(c) Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali nulle:
$x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$: (4 pt.)

$x(t) =$ $-t\,e^t$

$y(t) =$ $1 - e^t$

$z(t) =$ $-1 + (1-t)\,e^t$

(a) Pol. caratteristico $\det(A-\lambda I) =$

$$\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 & -3 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 3 & -2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(1+\lambda)(2+\lambda)+12 + 12 - \left((4-\lambda)4+(1+\lambda)9+(2+\lambda)4\right)$$

$$= (4-\lambda)(2+3\lambda+\lambda^2)+24-(16-4\lambda+9+9\lambda+8+4\lambda)$$

$$= 8+12\lambda+4\lambda^2-2\lambda-3\lambda^2-\lambda^3+24-33-9\lambda =$$

$$-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$$ ← VEDO CHE HA la radice $\lambda=1$ (e anche $\lambda=-1$)

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & & -1 & 0 & 1 \\ \hline & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow p(\lambda) = (\lambda-1)(-\lambda^2+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

AUTOVALORI $\lambda=1$ $m_A=2$ $\lambda=-1$ $m_A=1$

Vediamo la molt. geometrica di $\lambda=1$:

$$B_1 := A-I = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$ è di rango 2 !!

$\Rightarrow m_G = 1$

(b) Cerco $\bar{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \bar{Y}' = A\bar{Y}+B \iff$

Ho il sistema

$$\begin{cases} 0 = 4a-2b-3c-1 \\ 0 = 2a-b-2c-1 \\ 0 = 3a-2b-2c \end{cases}$$ $I^a - 2II^a \Rightarrow c+1=0$ $\boxed{c=-1}$

Metto $c=-1$ nelle ultime due righe:

$$\begin{cases} 2a-b=-1 \\ 3a-2b=-2 \end{cases}$$ $2I^a - II^a \Rightarrow$ $\boxed{a=0}$ da cui $\boxed{b=1}$

$$\bar{Y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Cerco $Y(t) = \bar{Y} + Y_0(t)$. Se metto $t=0$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = Y(0) = \bar{Y} + Y_0(t) \iff \underline{\underline{Y_0(t) = -\bar{Y} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}}$$

Devo trovare una forma di Jordan per A.

- Trovo un autovettore e_1 per $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix}4 & -2 & -3\\2 & -1 & -2\\3 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \begin{cases}5x - 2y - 3z = 0\\2x - 2z = 0\\3x - 2y + z = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}z = x\\2x - 2y = 0\\4x - 2y = 0\end{cases} \qquad x = y = z \qquad \text{posso prendere } e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

- Prendo $B_1 = A - I$ (quando $\lambda = 1$), cioè

$$B_1 = \begin{bmatrix}3 & -2 & -3\\2 & -2 & -2\\3 & -2 & -3\end{bmatrix} \quad \text{(che ha rango 2, come già visto)}$$

$$B_1^2 = \begin{bmatrix}-4 & 4 & 4\\-4 & 4 & 4\\-4 & 4 & 4\end{bmatrix} \qquad \text{Mi serve } e_3 \in \operatorname{Ker} B_1^2 \text{ ma } B_1 e_3 \neq 0$$

Dalla forma di B_1^2 ho che $\operatorname{Ker} B_1^2 = \{x = y + z\}$

dunque $e_3 = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}$. Guardando il vettore $Y_0(0) = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ vedo che è di questo tipo e

che $B_1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ Allora pongo

$$e_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = B e_3 \quad (e_2 \text{ è autovettore per } \lambda = 1)$$

Pongo $M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Usando la formula ho

$$Y_0(t) = e^{tA} Y_0(0) = M e^{tJ} M^{-1} e_3 = M e^{tJ} \hat{e}_3 =$$

$$M \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{t} M \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{t} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{t} \begin{bmatrix} -t \\ -1 \\ -t+1 \end{bmatrix} \Rightarrow Y(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{t} \begin{bmatrix} -t \\ -1 \\ 1-t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -t e^{t} \\ 1 - e^{t} \\ -1 + (1-t)e^{t} \end{pmatrix}$$