Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 22 marzo 2024 -B

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è un ora e trenta minuti.

**Esercizio 1** Sia

$$V := \{(x, y, z) : e^{xyz} = x - y + 3z\}$$

1. (a) Si trovino tutti gli eventuali punti $P = (x, y, z)$ di $V$ per cui **NON si può** applicare il Teorema del Dini, rispetto a nessuno degli assi ($x$, $y$ e $z$): (5 pt.)

   $P=$ , $P=$ , $P=$

   ~~non c'è nessun punto $P$ come sopra~~, ci sono più di tre punti $P$ come sopra.

2. (b) Consideriamo il punto $P_0 := (0, 2, 1)$ che chiaramente appartiene a $V$. Si verifichi se esiste una funzione $(x, y) \mapsto z(x, y)$, definita per $(x, y)$ vicino a $(0, 2)$, tale che, vicino a $P_0$, i punti di $V$ sono del tipo $(x, y, z(x, y))$. In caso affermativo si calcolino le derivate parziali di $z(x, y)$ nel punto $(0, 2)$. (4 pt.)

   $z(x,t)$ non esiste / $z(x,t)$ esiste e $\frac{\partial z}{\partial x}(0,2) =$ 1/3 , $\frac{\partial z}{\partial y}(0,2) =$ 1/3 ,

**Esercizio 2** Sia $f : ]0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si indichino le affermazioni corrette tra le seguenti. Nella domanda il termine "integrabile" significa "integrabile secondo Lebesgue" e tutti gli integrali sono considerati nell'intervallo $]0, 1]$.

**(a)** Se $f$ è limitata, allora $f$ è integrabile: ~~vero~~ / falso; (2 pt.)

**(b)** Se $f$ è integrabile secondo Riemann in senso improprio, allora $f$ è integrabile: vero / ~~falso~~; (2 pt.)

[c] Se $f$ è integrabile, allora $f$ è assolutamente integrabile secondo Riemann in senso improprio: ~~vero~~ / falso. (3 pt.)

① Se $G(x,y,z) = e^{xyz} - x + y - 3z \Rightarrow V = \{P : G(P) = 0\}$

I PUNTI P per cui si può applicare Dini - RISPETTO A UN QUALUNQUE ASSE - sono i punti P ~~tali~~ che $G(P)=0$ e $\nabla G(P) \neq 0$. Dunque i punti per cui Dini non si può applicare sono quelli per cui $\boxed{G(P)=0 \quad \nabla G(P)=0}$

⊛

2: Ho $\nabla G(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} e^{xyz} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Dunque (*) $\iff \begin{cases} yz\, e^{xyz} = 1 \\ xz\, e^{xyz} = -1 \\ xy\, e^{xyz} = 3 \\ e^{xyz} = x - y + 3z \end{cases}$

Da I e II ottengo

$yz\, e^{xyz} = 1 = -xz\, e^{xyz}$ $(\Rightarrow z \neq 0)$

semplifico $z e^{xyz} \Rightarrow$ $\boxed{y = -x}$

Nello stesso modo da I e III ottengo $3yz e^{xyz} = 3 = xy e^{xyz} \Rightarrow$ $\boxed{x = 3z}$

Dunque $x = 3z$, $y = -3z \Rightarrow -3z^2 e^{-3z^3} = 1$ e $e^{-3z^3} = -9z$

Ne deduco $-3z^2(-9z) = 1 \iff z^3 = -1/27 \iff \boxed{z = -1/3 \quad x = -1 \quad y = 1}$

Però se inserisco $z = -1/3$ in $-3z^2 e^{-3z^3} = 1$ trovo $-\frac{1}{3} e^{1/9} = 1$ che NON VALE

IN DEFINITIVA NON CI SONO SOLUZIONI.

(1.b) $\nabla G(0,2,1) = (2-1,\ 0+1,\ 0-3) = (1, 1, -3)$

Dato che la componente z è $-3 \neq 0$ posso esplicitare z.

Per il teorema del Dini (tutto in $P_0$)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x} \Big/ \frac{\partial G}{\partial z} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial y} \Big/ \frac{\partial G}{\partial z} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

(2) Notiamo che essendo continua f è misurabile e lo stesso vale per $|f|$ che è anche lei continua.

(a) Se f è limitata esiste una costante K tale che $-K \leq f \leq K$. Ne segue che

$\int_0^1 |f| \leq \int_0^1 K = K < +\infty \Rightarrow f$ è integrabile

(b) È stato detto a lezione.

(c) Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora $|f|$ è integrabile secondo Riemann e anche secondo Lebesgue su $[\varepsilon, 1]$ (a causa della continuità). Dato che $|f|$ è integrabile su $]0,1]$, per i teoremi sull'integrale di Lebesgue(*) si ha che

$$+\infty > \int_0^1 |f(x)|\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 |f(x)|\,dx$$

Ma allora $|f|$ è integrabile in senso improprio secondo Riemann.

**Esercizio 3** Si considerino il dominio

$$D := \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, x^2+4y^2 \le z\}$$

in $\mathbb{R}^3$ e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to [-\infty, \infty]$, definita da:

$$f(x,y,z) := \frac{xy}{z^2\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{se } z^2\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$$

$\frac{1}{3}\ln(3)$

e $f(x,y,z) := +\infty$ se il denominatore fa zero.

Si dica se $f$ ammette integrale su $D$ e in caso affermativo si calcoli l'integrale triplo:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$$

(eventualmente infinito). Si richiede lo svolgimento del ragionamento e dei calcoli fatti per arrivare al risultato da riportare nello spazio bianco che segue.

*Svolgimento* (12 pt.)

$f$ è continua in $D$ tranne che nei punti $\{x=y=0,\ z\ge 0\}$ che costituiscono una semiretta in $\mathbb{R}^3$ che è trascurabile.

Dunque $f$ è misurabile in $D$. Notiamo che $f\ge 0$ in $D$ per cui $f$ ammette integrale in $D$ $^{(*)}$. DUNQUE POSSO PASSARE IN COORDINATE CILINDRICHE $x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\sin\theta$ $z=z$. IN QUESTO MODO $D$ SI TRASFORMA IN $D_1 = \{\rho\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/2,\ \rho^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)\le z\}$ e l'integrale diventa $\iiint_{D_1} \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{z^2\,\rho}\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz =$

$$\int_0^1 \rho^2\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\left(\int_{\rho^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)}^{+\infty}\frac{dz}{z^2}\right)d\theta\right)d\rho =$$

$$\int_0^1 \rho^2\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\left[-\frac{1}{z}\right]_{\rho^2(1+3\sin^2\theta)}^{+\infty}d\theta\right)d\rho =$$

$$\int_0^1 \rho^2\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho^2(1+3\sin^2\theta)}\,d\theta\right)d\rho =$$

cambio di variabile $s=\sin^2\theta \Rightarrow ds = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\left(\int_0^1 d\theta\right)}_{=1}\left(\int_0^1\frac{ds}{1+3s}\right) = \left[\frac{1}{3}\ln(1+3s)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}\ln(4)$$

(*) L'integrale di $f$ in $D$ è l'integrale di $\tilde{f}$ che coincide con $f$ in $D$ e vale zero fuori da $D$ .

**Esercizio 4** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x, y) = xy - x - y$ e sia

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 25, x \geq -4\}.$$

(a) Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per $f$ su $D$ (possono essere meno di otto): (8 pt.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(x, y) =$ | $(1, 1)$ | $(x, y) =$ | $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}5, \frac{\sqrt{2}}{2}5\right)$ |
| $(x, y) =$ | $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}5, \frac{\sqrt{2}}{2}5\right)$ | $(x, y) =$ | |
| $(x, y) =$ | $(4, -3)$ | $(x, y) =$ | $(-3, 4)$ |
| $(x, y) =$ | $(-4, 3)$ | $(x, y) =$ | $(-4, -3)$ |

(b) Si calcoli il minimo di $f$ su $D$ (oppure si scriva "non esiste"): (2 pt.)

$$\min_{(x,y)\in D} f(x, y) = -13.$$

(c) Si trovi un punto di massimo (assoluto) per $f$ su $D$ (oppure si scriva "non esiste"): (2 pt.)

$$(x_{max}, y_{max}) = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right).$$

$f(x,y) = xy - x - y \qquad G_1(x,y) = x^2 + y^2 - 25 \qquad G_2(x,y) = -x - 4$

$D = \{G_1 \leq 0 \,,\, G_2 \leq 0\}$

$\nabla f = \begin{pmatrix} y-1 \\ x-1 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- I punti critici di $f$ su $D$ sono di quattro tipi:

(1) I punti $P$ con $\nabla f(P) = 0$, $G_1(P) < 0$, $G_2(P) < 0$, cioè

$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 < 25 \,,\, x > -4 \end{cases} \Rightarrow$ TROVO $\boxed{(1,1)}$

(2.A) I punti con $\nabla f(P) = \lambda \nabla G_1(P)$ $G_1(P)=0$ $G_2(P)<0$, cioè:

$$\begin{cases} y-1 = 2\lambda x \\ x-1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2=25,\ x>-4 \end{cases} \begin{matrix} \to y^2-y = 2\lambda x y \\ \to x^2-x = 2\lambda x y \end{matrix} \to \begin{matrix} y^2-y = x^2-x \iff \\ y^2-x^2 = y-x \iff \\ (y-x)(y+x) = y-x \end{matrix}$$

Dunque $y=x$ oppure $x+y=1$. Nel primo caso, dalla terza condizione $x=y=\pm\frac{5}{\sqrt{2}}$. Nel secondo ho
$x^2+(1-x)^2 = 25 \iff 2x^2-2x-24=0 \iff x^2-x-12=0 \iff$

$$x = \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2} = \frac{1\pm 7}{2} = \begin{matrix} 4 \\ -3 \end{matrix} \qquad (e\ y=1-x)$$

IN DEFINITIVA TROVO

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}5, \frac{\sqrt{2}}{2}5\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}5, -\frac{\sqrt{2}}{2}5\right),\ (4,-3),\ (-3,4)}$$

che verificano tutti $x>-4$

(2.B) $\nabla f(P) = \lambda \nabla G_2(P)$ $G_1(P)<0$ $G_2(P)=0$, cioè

$$\begin{cases} y-1 = -\lambda \\ x-1 = 0 \\ x^2+y^2<25,\ x=-4 \end{cases}$$

INCOMPATIBILI

(3) $\nabla f(P) = \lambda \nabla G_1(P) + \mu \nabla G_2(P)$, $G_1(P)=G_2(P)=0$

Dunque $x=-4$ $y=\pm 3$ $\boxed{(-4,3) \quad (-4,-3)}$

Calcolo $f$ sui punti critici che ho trovato

$f(1,1) = 1-1-1 = -1$

$f\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{2} - 5\sqrt{2}$

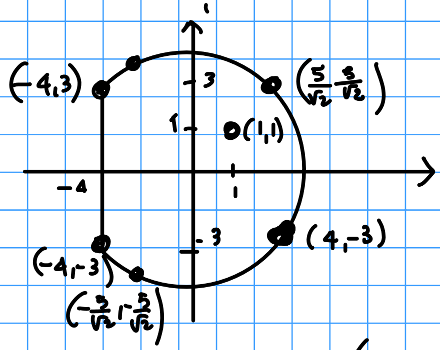
$f\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{2} + 5\sqrt{2}$

$f(4,-3) = -12-4+3 = -13$

$f(-3,4) = -12+3-4 = -13$

$f(-4,3) = -12+4-3 = -11$

$f(-4,-3) = +12+4+3 = 19$




DUNQUE IL MAX è $\frac{25}{2}+5\sqrt{2}$ e il MIN è $-13$, nei pti $(4,-3)$, $(-3,4)$

$\frac{25}{2} < 19 < \frac{25}{2}+5\sqrt{2} \iff 38 < 25+10\sqrt{2} \iff 13 < 10\sqrt{2} \iff 169 < 200$